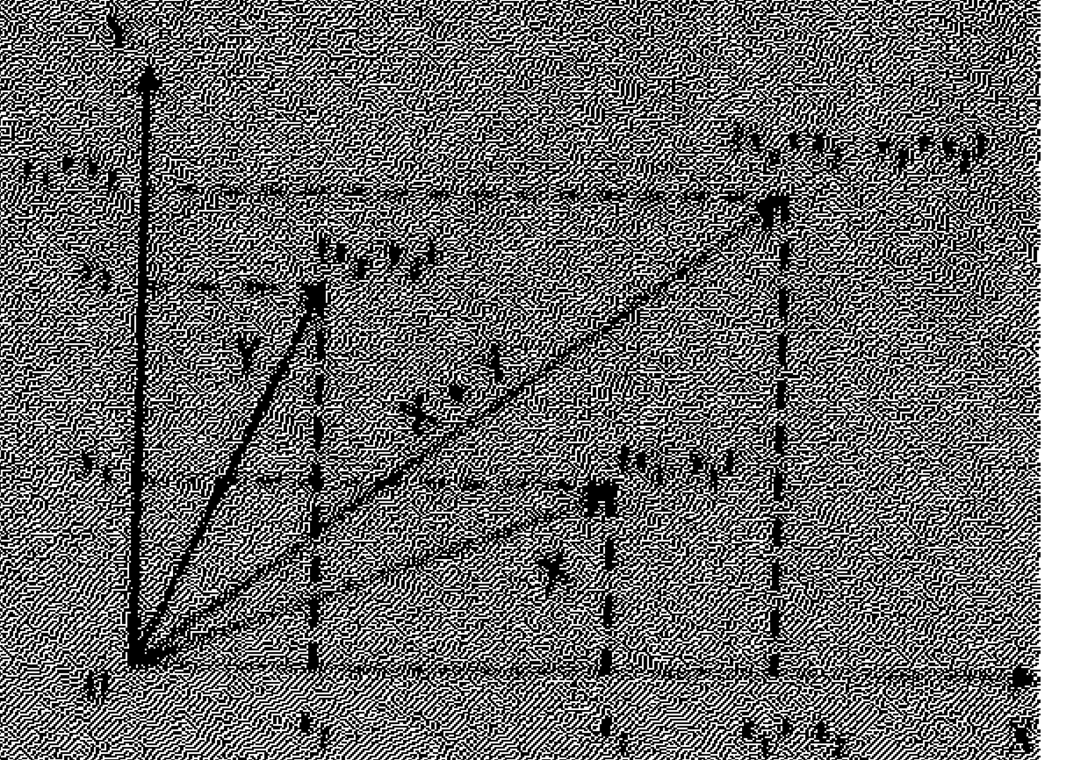
مقدمة في
الجبر الخطي

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$



د. إبراهيم محمود إبراهيم

أ. فاطمة سيد هاشم

أ. محمود حمزة حيدر

مقدمة فى

الجبر الخطى

د. ابراهيم محمود ابراهيم
أ. فاطمة سيد هاشم
أ. محمود حمزة حيدر

الطبعة الثانية
١٤١٦هـ - ١٩٩٥م

الناشر

دار الترجمة

نشر - ترجمة - طباعة - توزيع

ت: ٢٤٢٨٨١١ - ٢٤٠٦٥٥٩
فاكس: ٢٤٥٤٧٥٩
ص.ب: ٢٢١٠٦ صفاة - الكويت

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

نقوم في هذا الكتاب بدراسة مبسطة لمنهاج الجبر الخطي الذي يعد من أهم وأكثر فروع الجبر تطبيقاً ، وقد راعينا عند كتابة هذا الكتاب أن يكون وافياً بحاجة أبنائنا طلاب الجامعات .

ودعماً للجهد المبذول في التأليف والنشر لكتب الرياضيات باللغة العربية فإننا نقدم هذا الجهد المتواضع بأسلوب ينتفع به المبتدئون في دراسة هذا الموضوع ، كما ينتفع به من يرغب في المزيد من المعرفة لكثرة تطبيقات الجبر الخطي في فروع العلم المختلفة مثل نظرية البيانات وتطبيقاتها ، والاحتمالات ، والنماذج الاقتصادية الخطية والجبر الخطي العددي .

ويتكون هذا الكتاب من تسعة أبواب يجد القارئ في كل باب منها العرض النظري الشامل للموضوع ، بجانب الأمثلة المحلولة الوفيرة ، إضافة إلى العديد من التمارين في نهاية كل باب .

الباب الأول : وفيه عرض لدراسة شاملة تعالج إمكانية حل أنظمة المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة باستخدام طريقة جاوس – جوردان للحذف المتتالي .

الباب الثاني : وقد خصص لدراسة المصفوفات وأنواعها ، والعمليات الجبرية على المصفوفات وكيفية إيجاد معكوس المصفوفة ، وحل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة .

الباب الثالث : ويقدم دراسة شاملة للمحددات ، وكيفية حساب قيمة المحدد ، واستخدام حواصل الضرب الأولى المميز ، وخواص المحددات ، وإيجاد مفكوك المحدد باستخدام المتممات المميزة ، ومعكوس المصفوفة باستخدام المتممات المميزة ، وطريقة كرامر لحل مجموعة من المعادلات الخطية .

الباب الرابع : ويعالج دراسة المتجهات في الفضاءات $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ، والعمليات الجبرية على المتجهات ، والمعيار والمسافة في $\mathbb{R}^n$. والزاوية بين متجهين ، والضرب القياسي لمتجهين ، والضرب الاتجاهي في $\mathbb{R}^3$ وخواصه . إضافة إلى بعض تطبيقات الضرب الاتجاهي مثل إيجاد مساحة المثلث ، وإيجاد مساحة متوازي الأضلاع ، وحجم متوازي المستطيلات ، والأعداد المركبة والمتجهات في الفضاء $\mathbb{C}^n$.

الباب الخامس : ويدرس الفضاءات والفضاءات الجزئية المتجهة ، والتركيب الخطي ، والمجموعة المولدة ، والمجموع والمجموع المباشر ، والفضاء الصفي والفضاء العمودي لمصفوفة ما .

الباب السادس : ويتضمن مفاهيم الارتباط والاستقلال الخطي لمجموعة متجهات ، والأساس والبعد للفضاء المتجه ، وكيفية حساب رتبة المصفوفة ، وتطبيق مفهوم رتبة المصفوفة لحل مجموعة من المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة باستخدام نظرية كرونيكل – كابيلي . وتطبيق عملية جرام ـ شميت لإمكانية الحصول على أساسات متعامدة مُعيَّرة .

الباب السابع : وقد خصص لدراسة شاملة للتحويلات الخطية وخواصها ومصفوفات التحويلات الخطية .

الباب الثامن : ويتناول دراسة القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة ، والمصفوفة المميزة وكيفية استخدام المتجهات الذاتية لتحويل مصفوفة إلى مصفوفة قطرية .

الباب التاسع : ويتناول دراسة بعض التطبيقات الهندسية للجبر الخطي على المستقيمات والمستويات في $\mathbb{R}^3$ ، والصيغ التربيعية وعلاقتها بتحويل الإحداثيات من خلال دراسة نظرية المحاور الرئيسية ، ودراسة القطوع المخروطية ، وسطوح الدرجة الثانية .

وفي نهاية هذا الكتاب تم استعراض حلول تمارين الأبواب المختلفة وإضافة العديد من التمارين العامة كمراجعة شاملة لمحتويات الكتاب والمصطلحات الرياضية وعرض بعض المراجع العلمية التي تتعلق بدراسة هذا الموضوع موضع الدراسة .

وإننا لنأمل من هذا الكتاب الذي يعد إسهاماً متواضعاً في إثراء المكتبة العربية أن يكون موضع الثقة بين الأساتذة الزملاء وأبنائنا الطلاب وأن يكون الله قد وفقنا في تحقيق ما نصبو إليه والله ولي التوفيق .

المؤلفون

محتويات الكتاب

الصفحة

الباب الأول

المعادلات الخطية

LINEAR EQUATIONS

الباب الأول
المعـادلات الـخطـيـة
Linear Equations

نقوم في هذا الباب بدراسة المعادلات الخطية لما لها من دور أساسي في دراسة موضوع الجبر الخطي ، حيث إن العديد من مسائل الجبر الخطي تؤول إلى معادلات خطية .

مقدمة عن أنظمة المعادلات الخطية

مراجعة لما سبق دراسته يمكن تمثيل معادلة الخط المستقيم في المستوى xy بواسطة معادلة على الصورة :

$$a_1 x + a_2 y = b$$

وتعرف هذه المعادلة بمعادلة خطية في المتغيرين x, y .

وسوف تعتمد دراستنا على المعادلات الخطية في مجال الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ في n من المتغيرات التي على الصورة

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \quad . \quad a_i \, , x_i \in \mathbb{R}$$

وتعرف x_i's بالمتغيرات ، وتعرف a_i بمعاملات x_i ، $1 \le i \le n$

ويعرف b بالحد المطلق .

مثال (١- ١) :

المعادلات التالية معادلات خطية :

$$x - 4y = 7 \qquad x_1 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 8$$

$$x = \frac{1}{2}y + 4z - 1$$

يلاحظ أن المعادلة الخطية لا تشمل أي حواصل ضرب أو جذور للمتغيرات . فتظهر جميع المتغيرات في الأس الأول (القوة الأولى) . كما أنه لا تظهر أي دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية . لذلك لا تصلح المعادلات التالية أن تكون معادلات خطية .

$$x^2 + 2y = 6 \qquad Cos\, x - 4y = 0$$

$$2xy - 4x + 6y = 7 \qquad \sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

وخلافاً للدراسات السابقة فإننا نتناول دراسة مجموعات المعادلات الخطية التي تتكون من أي عدد من المعادلات في أي عدد من المجاهيل وعلى ذلك سوف لا نفترض في كثير من الحالات أن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل .

بفرض لدينا مجموعة m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل على الصورة :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

ولإيجاد حل مثل هذه المجموعة من المعادلات علينا إيجاد مجموعة مكونة من n عدد $r_1 , r_2 , \ldots , r_n$ تحقق جميع معادلات المجموعة (1) .

وسنقوم حالياً بدراسة بعض التعريفات التي تلقي الضوء على الحالات الممكنة عند حل مجموعة المعادلات الخطية (1) .

تعاريـــف :

١ - إذا تعذر وجود أي حل يحقق مجموعة المعادلات (1) فإن المجموعة تعرف **بالمجموعة المتناقضة** . على سبيل المثال :

$$x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 3 \quad , \quad x_1 - 3\,x_2 + 4\,x_3 = 5$$

حيث ينطبق الطرفان الأيسران للمعادلتين ويختلف الطرفان الأيمنان ولذلك يتعذر وجود ثلاثة قيم للمجاهيل x_1 , x_2 , x_3 بحيث تحقق كل من المعادلتين .

٢ - إذا أمكن وجود حلول لمجموعة المعادلات (1) فإنها تعرف **بمجموعة غير متناقضة** . فإذا كان لها حل واحد وواحد فقط عرفت **بمجموعة محدودة** أما إذا كان لها أكثر من حل عرفت **بمجموعة غير محدودة** وفي هذه الحالة يكون لها عدد لا نهائي من الحلول .

فمثلاً مجموعة المعادلات $x_1 - 4\,x_2 = 5 \quad , \quad 5\,x_1 + 2\,x_2 = 3$

محدودة لأن لها حلاً وحيداً $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -1$

أما المجموعة غير محدودة $3\,x_1 + x_2 = 1 \quad , \quad 6\,x_1 + 2\,x_2 = 2$

لأن لها عدداً لا نهائياً من الحلول التي يمكن وضعها على الصورة :

$$x_1 = k \qquad x_2 = 1 - 3\,k$$

ولتوضيح الحالات الممكنة عند حل أنظمة المعادلات الخطية نفرض نظاماً لمعادلتين في مجهولين :

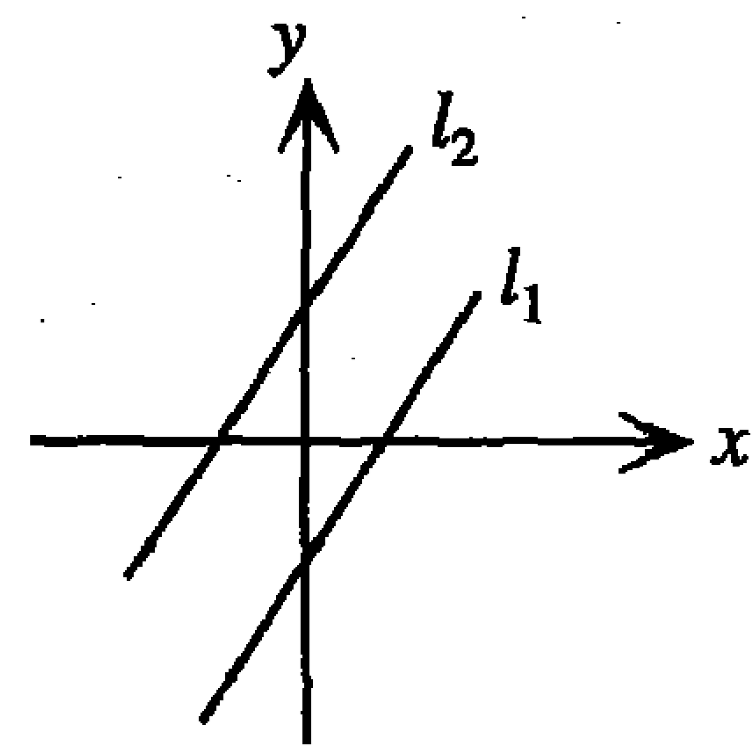
$$a_1\,x + b_1\,y = c_1 \quad , \quad a_1 , b_1 \neq 0$$
$$a_2\,x + b_2\,y = c_2 \quad , \quad a_2 , b_2 \neq 0$$

فإن الرسم البياني لهاتين المعادلتين خطان مستقيمان نفرضهما $l_1 \ , \ l_2$ وبما أن النقطة $(x \ , \ y)$ تقع على الخط المستقيم إذا - وفقط إذا - حقق العددان $x \ , y$ معادلة الخط المستقيم ، فإن حلول نظام المعادلات سوف تناظر نقط تقاطع l_2 مع l_1 وتوجد ثلاث حالات تمكنه :

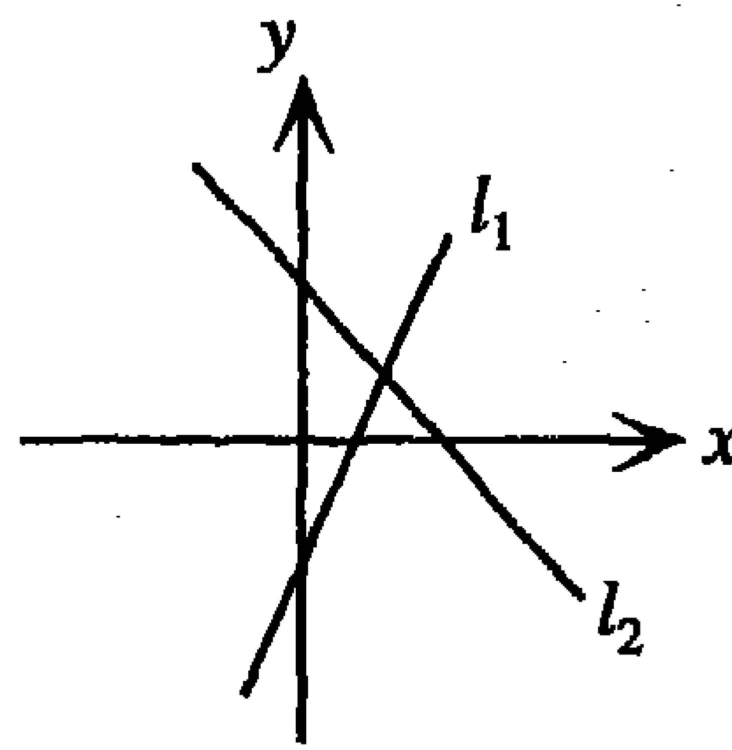
١ - قد يكون الخطان $l_1 \ , \ l_2$ متوازيين وفي هذه الحالة لا يوجد تقاطع وبالتالي لا يوجد حل للنظام (متناقضان) .

٢ - قد يتقاطع الخطان $l_1 \ , \ l_2$ في نقطة واحدة فقط وفي هذه الحالة يكون للنظام حل وحيد (محدودتان) .

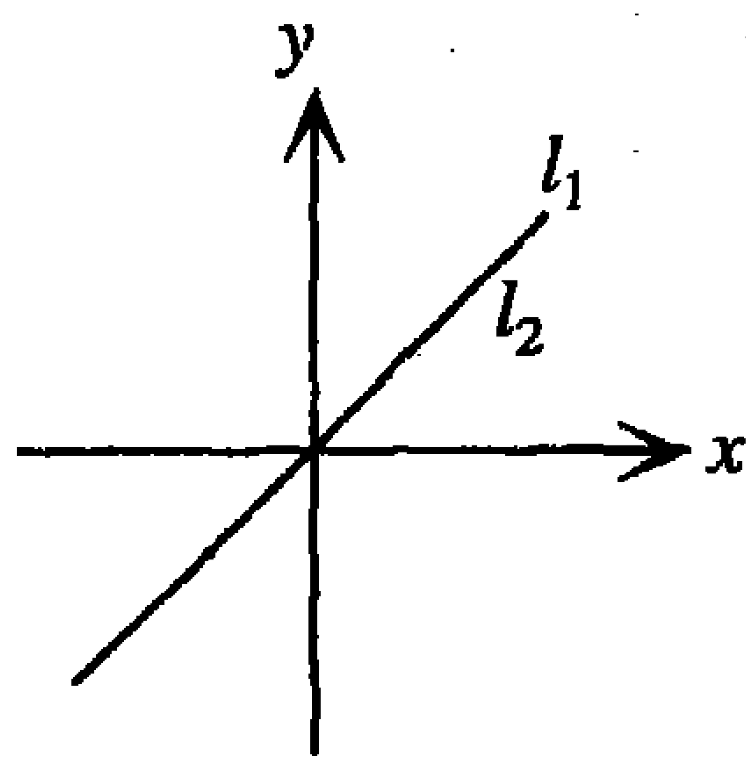
٣ - قد ينطبق الخطان $l_1 \ , \ l_2$ وفي هذه الحالة يوجد عدد لا نهائي من نقط التقاطع ، وبالتالي عدد لا نهائي من الحلول (غير محدودتين) .



لا يوجد حل



حل وحيد



عدد لا نهائي من الحلول

والطريقة الأساسية المتبعة لحل أي نظام لمعادلات خطية إحلال النظام الخطي الأصلي بنظام خطي جديد له نفس الحل ولكنه أسهل في الحل ويتم الحصول على هذا النظام الجديد في سلسلة من الخطوات بواسطة تطبيق **العمليات الأولية الثلاث** من عمليات حذف منتظم للمجاهيل :

١ - ضرب معادلة بكاملها في ثابت غير صفري .

٢ - إبدال معادلتين .

٣ - إضافة مضاعفات معادلة إلى معادلة أخرى .

فمثلاً إذا ضربنا طرف إحدى معادلات النظام الخطي (1) ولتكن المعادلة الأولى في العدد g وبعد ذلك طرحنا كل طرف من المعادلة الثانية من الطرف المناظر للمعادلة الأولى الناتجة من الضرب فإننا نحصل على المجموعة التالية :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a'_{21} x_1 + a'_{22} x_2 + \quad \dots \quad + a'_{2n} x_n &= b'_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \quad \dots \quad + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (2)$$

حيث $b'_2 = b_2 - g b_1 \quad , \quad a'_{2j} = a_{2j} - g a_{1j} \; , \; 1 \le j \le n$

تسمى المجموعتين (2) , (1) متكافئتين أي أنهما إما متناقضتان أو غير متناقضتين ولهما نفس الحلول .

وعلى ذلك نستنتج أن مجموعة المعادلات التي نحصل عليها بعد إجراء عدة عمليات من نوع مشابه لما ذكر على مجموعة المعادلات (1) تظل مكافئة للمجموعة الأصلية (1) .

وقد يحدث بعد إجراء مثل هذه العمليات أن تظهر إحدى المعادلات التي تتلاشى فيها كل المعاملات وهناك احتمالان :-

ح١ : أن يتلاشى الحد المطلق أيضاً وفي هذه الحالة تتحقق المعادلة لأي قيم من المجاهيل وبإهمال هذه المعادلة نحصل على مجموعة معادلات تكافئ المجموعة الأصلية .

ح٢ : إذا كان حدها المطلق لا يساوي الصفر فإنه لا يمكن تحقيق هذه المعادلة لأي قيم من المجاهيل ، وعليه تكون مجموعة المعادلات متناقضة .

طريقة الحذف المتتالي للمجاهيل (جاوس – جوردان):

نفرض أنه لدينا مجموعة المعادلة (1) وأن قيمة $a_{11} \neq 0$. أما إذا كانت قيمة a_{11} $= 0$ فإننا نبدأ بمعادلة يكون معامل x_1 لا يساوي الصفر .

تبدأ طريقة الحذف بحذف المجهول x_1 من جميع معادلات المجموعة ما عدا المعادلة الأولى وذلك بضرب طرفي المعادلة الأولى × $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ، ثم نطرحهما من طرفي المعادلة الثانية . ثم نضرب طرفي المعادلة الأولى × $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ونطرحهما من طرفي المعادلة الثالثة وهكذا فنحصل على مجموعة المعادلات :

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}\ x_n &= b_1 \\
a`_{22}\ x_2 + \quad \dots \quad + a`_{2n}\ x_n &= b`_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \qquad\qquad (3) \\
a`_{m2}\ x_2 + \quad \dots \quad + a`_{mn} x_n &= b`_m
\end{aligned}
$$

وكما نعرف أن مجموعة المعادلة (3) تكافيء المجموعة الأصلية (1) لذلك فإننا نجري العمليات على (3) على الجزء المكون من كل المعادلات ما عدا المعادلة الأولى التي لن نغير فيها شيئاً بعد الآن . مع الأخذ في الاعتبار أنه لا توجد بين هذه المعادلات معادلة تساوي كل معاملاتها أصفاراً لأن مثل هذه المعادلة تهمل إذا كان حدها المطلق يساوي صفراً وعلى العكس فإن مجموعة المعادلات تكون متناقضة .

ويفرض أن المعامل $a`_{22} \neq o$ فإننا نجري العمليات على المجموعة (3) بأن نطرح من أول المعادلة الثالثة وكل معادلة تالية من طرفي المعادلة الثانية بعد ضربهما × $\frac{a`_{n2}}{a`_{22}}$ و . . . و $\frac{a`_{42}}{a`_{22}}$ و $\frac{a`_{32}}{a`_{22}}$ على الترتيب وبذلك نكون قد حذفنا

المجهول x_2 من جميع معادلات المجموعة (3) ما عدا المعادلتين الأولى والثانية فنحصل على المجموعة :

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \quad \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a'_{22} x_2 + \quad \dots + a'_{2n} x_n &= b'_2 \\
a''_{33} x_3 + \dots + a''_{3n} x_n &= b''_3 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a''_{l3} x_3 + \dots + a''_{ln} x_n &= b''_l
\end{aligned}$$

على فرض أن هذه المجموعة تحتوي على l من المعادلات حيث $l \leq m$ بفرض أن تكون بعض المعادلات قد حذفت . وتستمر عملية الحذف بالتتالي حتى نحصل على أحد الاحتمالين :

ح١ : مجموعة من المعادلات بحيث يكون الحد المطلق لإحدى معادلاتها لا يساوي صفراً وكل معاملاتها تساوي أصفاراً فإن المجموعة تكون متناقضة .

ح٢ : أن نحصل على المجموعة التالية المكافئة للمجموعة (1) :

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \quad \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\
a'_{22} x_2 + \quad \dots + a'_{2n} x_n &= b'_2 \\
\vdots \qquad &\quad \vdots \\
a_{kk}^{(k-1)} x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)} x_n &= b_k^{(k-1)}
\end{aligned} \tag{4}$$

حيث $a_{11} \neq 0 \ , \ a'_{22} \neq 0 \ , \ \dots \ , \ a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

ونلاحظ أن $k \leq n \ , \quad k \leq m$

وفي هذه الحالة تكون المجموعة (1) غير متناقضة وهناك حالتان :-

(١) إذا كانت $k = n$ فتكون المجموعة محدودة وتؤول المجموعة (4) إلى المجموعة :

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \quad \cdots \quad + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a'_{22} x_2 + \quad \cdots \quad + a'_{2n} x_n &= b'_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)} x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (5)$$

نحصل من هذه المجموعة على قيمة محدودة للمجهول x_n نعوض بها في المعادلة السابقة نحصل على قيمة محدودة للمجهول x_{n-1} ، . . . وهكذا . نجد أن للمجموعة (5) حلاً وحيداً . وبالتالي فإن للمجموعة (1) حل وحيد . أي أنهما غير متناقضتين ومحدودتان .

(٢) إذا كانت $k < n$ أي أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل . وفي هذه الحالة فإننا ننقل المجاهيل $x_n , x_{n-1} , \ldots, x_{k-1}$ إلى الطرف الأيسر في المعادلة الأخيرة ثم نعطي لها قيماً اختيارية فنحصل بذلك على قيمة المجهول x_k ثم بالتعويض في المعادلات السابقة نحصل على قيم باقي المتغيرات أي أن المجموعة في هذه الحالة لها أكثر من حل وكل حل نحصل عليه بإعطاء قيم اختيارية للمجاهيل .

المعادلات المتجانسة:

إذا كانت الحدود المطلقة لمجموعة المعادلات (1) $b_1, b_2, \ldots, b_n$ جميعها تساوي أصفاراً فإن المجموعة تؤول إلى :

$$\begin{array}{l} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \quad \ldots \quad + a_{1n}\ x_n = 0 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \quad \ldots \quad + a_{2n}\ x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + \quad \ldots \quad + a_{mn}\ x_n = 0 \end{array} \qquad (6)$$

هذه المجموعة (6) تسمى **بالمعادلات المتجانسة** . تكون مثل هذه المجموعة غير متناقضة دائماً لأن لها حلاً يسمى **بالحل الصفري** $x_i = 0\ , 1 \le i \le n$ عندما يكون عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل وهي الحالة الوحيدة التي تكون فيها هذه المعادلات محدودة . أما إذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل فإن هذه المجموعة يكون لها حلول غير الحل الصفري (أي عدد لا نهائي من الحلول) .

مصفوفة المعاملات:

تسمى منظومة معاملات المجموعة (1) **بمصفوفة المعاملات** (التي سوف ندرسها في الأبواب التالية بتفصيل أوسع) وتعرف بأنها مصفوفة من النوع $m \times n$ حيث m = عدد الصفوف , n = عدد الأعمدة .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة الموسعة (الممتدة):

إذا أضيفت الحدود المطلقة لمجموعة المعادلات (1) كآخر عمود من أعمدة مصفوفة المعاملات مفصول عن باقي الأعمدة بخط رأس سميت بالمصفوفة الموسعة ويلاحظ أنها من النوع $m \times (n + 1)$

حيث m = عدد الصفوف , $n + 1$ = عدد الأعمدة

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

تعريف :

يقال لمصفوفة ما من النوع $m \times n$ إنها في الشكل الصفي المميز إذا حققت الخواص التالية :

١ - إذا لم يكن الصف مكوناً بكامله من أصفار ، فيكون 1 هو العنصر الأول غير الصفري في الصف (يسمى هذا العنصر بالواحد المتقدم) .

٢ - إذا وجدت أي صفوف مكونة بكاملها من أصفار لتجمع معاً في قاع المصفوفة .

٣ - في أي صفين متتابعين غير مكونين بكاملهما من أصفار يوجد الواحد المتقدم في الصف الأسفل أيمن الواحد المتقدم في الصف الأعلى .

كمثال المصفوفات التالية في الشكل الصفي المميز :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريـــف :

يقال لمصفوفة ما من النوع $m \, x \, n$ إنها في **الشكل الصفي المميز المختزل** إذا حققت الشروط الثلاثة السابقة بالإضافة إلى الشرط التالي :

يكون بالعمود المحتوي على واحد متقدم أصفار في كل مكان عدا هذا العنصر .

كمثال المصفوفات التالية في الشكل الصفي المميز المختزل :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ملاحظـــــة :

يلاحظ أن المصفوفة في الشكل الصفي المميز تحوي أصفاراً أسفل كل واحد متقدم . أما المصفوفة في الشكل الصفي المميز المختزل فإنها تحوي أصفاراً أعلى وأسفل الواحد المتقدم .

ولإيجاد حل مجموعة المعادلات (1) فإننا نجري **العمليات الأولية** السابق ذكرها على **المصفوفة الموسعة** لهذه المجموعة من المعادلات حيث إن العمليات الثلاث السابق ذكرها تناظر العمليات الآتية على صفوف المصفوفة الموسعة :

(١) ضرب صف كامل بثابت غير صفري . $R_m \rightarrow \alpha R_m,\ \alpha \neq 0$

(٢) إبدال صفين . $R_m \leftrightarrow R_n$

(٣) إضافة مضاعفات صف إلى صف آخر . $R_m \rightarrow \alpha R_n + R_m,\ m \neq n$

فإذا تمكنا من وضع المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية بواسطة العمليات الأولية على صفوفها في الشكل الصفي المميز (جاوس) أو الشكل الصفي المميز المختزل (جاوس – جوردان) فيمكن الحصول على مجموعة الحل للنظام المعطى بسهولة أو بعد قليل من الخطوات البسيطة (عمليات التعويض الخلفي) .

مثال (١-٢) :

بفرض أن المصفوفة الموسعة لنظام ما من المعادلات الخطية ، قد اختزل بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصفي المميز المختزل المعطى على الصورة :

(أ) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$ (ب) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

(جـ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (د) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

حل كل نظام

(أ) نظام المعادلات المناظر هو :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + 4x_4 &= -1 \\ x_2 \quad + 2x_4 &= 6 \\ x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

يعطي الحل للمتغيرات x_1, x_2, x_3 بدلالة x_4 حيث x_1, x_2, x_3 تسمى بالمتغيرات المتقدمة حيث إنها تناظر الآحاد المتقدمة .

$$x_1 = -1 - 4x_4 \quad , \quad x_2 = 6 - 2x_4 \quad , \quad x_3 = 2 - 3x_4$$

نحصل على عدد لا نهائي من الحلول (عدد المعادلات أقل من عدد

المجاهيل) حيث إنه يمكن إعطاء x_4 قيمة اختيارية ولتكن k وبذلك تكون مجموعة الحل :

$$x_1 = -1-4k \quad , \quad x_2 = 6-2k \quad , \quad x_3 = 2-3k \quad , \quad x_4 = k$$

$$(-1-4k \; , \; 6-2k \; , \; 2-3k \; , \; k)$$

(ب) نظام المعادلات المناظر هو :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= \;\; 5 \\ x_2 \qquad &= -2 \\ x_3 &= \;\; 4 \end{aligned}$$

أي نحصل على حل وحيد

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = -2 \quad , \quad x_3 = 4$$

(جـ) المعادلة الأخيرة في نظام المعادلات المناظرة جميع معاملاتها أصفار وحدها المطلق يساوي 1 وبالتالي فإن مجموعة المعادلات ليس لها حل (مجموعة متناقضة) .

(د) نظام المعادلات المناظر هو :

$$\begin{aligned} x_1 + 6\,x_2 \qquad\qquad + 4\,x_5 &= -2 \\ x_3 \qquad + 3\,x_5 &= \;\; 1 \\ x_4 \;\; + 5\,x_5 &= \;\; 2 \end{aligned}$$

وتكون x_1, x_3, x_4 المتغيرات المتقدمة ويعطى الحل بدلالة المتغيرات الباقية (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل يناظره عدد لانهائي من الحلول) .

$$x_1 = -2 - 6\,x_2 - 4\,x_5$$

$$x_3 = 1 - 3\,x_5$$

$$x_4 = 2 - 5\,x_5$$

وبإعطاء كل من x_2 , x_5 قيماً اختيارية $x_2 = k$, $x_5 = l$ نحصل على

$$x_1 = -2 - 6k - 4l$$
$$x_3 = 1 - 3l$$
$$x_4 = 2 - 5l$$
$$(-2 - 6k - 4l,\ k,\ 1 - 3l,\ 2 - 5l,\ l)$$

مثال (١ ـ ٣) :

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x \quad - z &= 3 \end{aligned}$$

باستخدام : (أ) طريقة جاوس للحذف

(ب) طريقة جاوس - جوردان للحذف

(أ) **أولاً** : نكون المصفوفة الموسعة لهذه المجموعة ثم نجري العمليات الأولية على صفوفها حتى نحصل على الشكل الصفي المميز :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-1}{5} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right] \quad R_3 \to 6R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{-1}{4} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر هو :

$$x + 2y + 3z = 9$$
$$y + z = 2$$
$$z = 3$$

بالتعويض الخلفي :

$$y + 3 = 2 \qquad y = -1$$
$$x - 2 + 9 = 9 \qquad x = 2$$
$$x = 2 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad z = 3$$

أي أن المجموعة لها حل وحيد .

(ب) ثانياً : لتطبيق طريقة جاوس - جوردان نجري نفس الخطوات السابقة ثم نبدأ بإجراء العمليات على آخر مصفوفة حتى نحصل على الشكل الصفي المميز المختزل :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad R_1 \to -2R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to -R_3 + R_1 \\ R_2 \to -R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x = 2 \quad , \quad y = -1 \quad , \quad z = 3$$

مثال (١ ـ ٤) :

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 &= 25 \end{aligned}$$

أولاً : نكون المصفوفة الموسعة لهذه المجموعة ثم نجري العمليات الأولية :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-1}{3} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-11}{3} \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{array}\right] \quad R_3 \to 12R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-11}{3} \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{-1}{8} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$x_3 = -1 \quad , \quad x_2 + \frac{2}{3} x_3 = \frac{-11}{3} \quad , \quad x_1 + 2\, x_2 + 5\, x_3 = -9$

$x_2 = \frac{-11}{3} + \frac{2}{3} = -3 \qquad\qquad x_1 = -9 + 6 + 5 = 2$

المجموعة محدودة $\quad x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -3 \quad , \quad x_3 = -1$

ثانياً : يمكن إيجاد الحل باستخدام طريقة جاوس - جوردان وذلك باستكمال عمليات الحذف حتى نحصل على المصفوفة المميزة المختزلة ولنبدأ من المصفوفة الأخيرة .

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-11}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-2}{3} R_3 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to -2\, R_2 + R_1 \\ R_1 \to -5\, R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -3 \quad , \quad x_3 = -1$

ملاحظة هامة:

نلاحظ أنه في العديد من التمارين يفضل أن يكون للدارس العين الثاقبة التي تحدد له أي العمليات الأولية يجب تطبيقه وأن تكون لديه المرونة في استخدام هذه العمليات حيث يتضح من المثالين السابقين أن طريقة الوصول إلى الحل تكاد أن تسير على خطوات ثابتة - في كل منها - ليس فيها أي تغيير فأحياناً يتطلب لسهولة وسرعة الوصول إلى الحل مع عدم الإكثار من العمليات الحسابية المهارة لتحديد أي من العمليات يجب تطبيقه أولاً وذلك كما نرى من المثالين التاليين :

مثال (١ - ٥) :

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 &= 1 \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 \qquad - 7x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 &= 2 \end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذه المجموعة ونجري العمليات الأولية اللازمة :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & 5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -3R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{array}\right] \quad R_4 \to R_3 + R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & 4 \end{array}\right] \quad R_4 \to -R_2 + R_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right]$$

عند هذه الخطوة يكتفى بعمليات الحذف حيث إنه من الصف الأخير نلاحظ أنه توجد معادلة جميع معاملاتها أصفار وحدها المطلق يساوي 12 وعلى ذلك فإن المجموعة الأصلية متناقضة (أي ليس لها حل) .

مثال (١ ـ ٦) :

ادرس حل مجموعة المعادلات المتجانسة التالية :

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$$

بما أن المجموعة متجانسة فإننا نجري العمليات الأولية على صفوف مصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -4R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 0 & 9 & 5 & -13 \end{bmatrix} \quad R_3 \to -R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

عند هذه الخطوة نحصل على مجموعة المعادلات :

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$$

$$7x_2 + 5x_3 - 11x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2x_4 = 0$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على $x_2 = x_4$ بفرض $x_4 = k$ إذن $x_2 = k$

وبالتعويض في المعادلة الثانية $x_3 = \frac{4}{5}k$ وأخيراً من المعادلة الأولى $x_1 = \frac{3}{5}k$ وتكون مجموعة الحلول $(\frac{3}{5}k, k, \frac{4}{5}k, k)$ وهي الصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات الأصلية (عدد لا نهائي من الحلول لأن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل) .

ملاحظـــة :

حاول تطبيق الطريقة المباشرة المتبعة في مثالي ٣ ، ٤ لتلاحظ الفرق بينها وبين ما اتبع في أمثلة ٥ ، ٦ من كثرة العمليات الحسابية .

مثال (١ ـ ٧) :

ادرس حل مجموعة المعادلات المتجانسة التالية :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

بإجراء العمليات الأولية على صفوف مصفوفة المعاملات :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_1 + R_2 \\ R_3 \to -2R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -8 \end{bmatrix} R_2 \to \frac{1}{5} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -8 \end{bmatrix} R_3 \to 3R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على مجموعة المعادلات :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ -5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

التي لها الحل الصفري $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

(حل وحيد لأن عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل) .

مثال (١ـ٨) :

أوجد قيمة a التي تجعل النظام الخطي التالي :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ -x + 3y + (a^2 + 1)z &= a \end{aligned}$$

(أ) له حل وحيد .

(ب) له عدد لا نهائي من الحلول .

(جـ) ليس له حل . ثم أوجد الحلول في كل من الحالتين (أ) ، (ب) .

أولاً : نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ثم نجري العمليات الأولية على صفوفها :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ -1 & 3 & a^2+1 & a \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 5 & a^2+4 & a+9 \end{array}\right] R_2 \to -\frac{1}{5} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & a^2+4 & a+9 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_3 \to -5R_2 + R_3 \\ R_1 \to -2R_2 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{array}\right]$$

(أ) كي يكون للنظام حل وحيد فإن $a^2 - 1 \neq 0$

وبالتالي فإن $a \neq 1 , -1$

وفي هذه الحالة يضرب الصف الثالث في $\frac{1}{a^2-1}$ فنحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+1) \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to -R_3 + R_1 \\ R_2 \to -R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (5a+4)/(a+1) \\ 0 & 1 & 0 & (2a+1)/(a+1) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+1) \end{array}\right]$$

ويكون الحل الوحيد هو

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5a+4)/(a+1) \\ (2a+1)/(a+1) \\ 1/(a+1) \end{bmatrix}$$

(ب) كي يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول فإن

$$a - 1 = 0 \quad , \quad a^2 - 1 = 0$$

أي أن $a = 1$

وفي هذه الحالة نحصل على معادلتين فقط هما :

$$x + z = 5$$
$$y + z = 2$$

وهاتان المعادلتان تعطيان عدداً لا نهائياً من الحلول

وبفرض $z = k$ فإن الصورة العامة :

$$x = 5 - k \quad , \quad y = 2 - k \quad , \quad z = k$$
$$(5 - k ,\ 2 - k,\ k).$$

(جـ) كي لا يكون للنظام حل فإن

$a^2 - 1 = 0 \quad , \quad a - 1 \neq 0$ أي أن : $a = -1$

مثال (١ ـ ٩) :

اذكر الشروط الواجب توافرها على a, b, c لكي تكون مجموعة المعادلات الخطية :

$$x - 2y + 4z = a$$
$$2x + 3y - 2z = b$$
$$3x + y + 2z = c$$

(أ) لها عدد لا نهائي من الحلول .

(ب) متناقضة (أي ليست لها حل) .

نكون المصفوفة الموسعة لمجموعة المعادلات ثم نجري العمليات الأولية على صفوفها :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & 3 & -2 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 7 & -10 & b-2a \\ 0 & 7 & -10 & c-3a \end{array}\right] \quad R_3 \to -R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a-2a \\ 0 & 7 & -10 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$$

من المصفوفة الموسعة الأخيرة نلاحظ أن :

(أ) يكون لمجموعة المعادلات الخطية عدد لا نهائي من الحلول إذا كان

$c - b - a = 0$ (أو $c = a + b$)

(ب) تكون مجموعة المعادلات متناقضة إذا كان

$c - b - a \neq 0$

أي أن $c \neq a + b$

تمــــارين (١)

١ - أي من المعادلات الآتية تعتبر معادلات خطية في x_1, x_2, x_3

(i) $x_1 + 2x_1 x_2 + x_3 = 2$

(ii) $x_1 + x_2 + x_3 = \text{Sin } k$ حيث k مقدار ثابت

(iii) $x_1 = x_3$

(iv) $x_1 - 3x_2 + 2\sqrt{x_3} = 4$

٢ - كون المصفوفة الموسعة لكل من أنظمة المعادلات الخطية التالية :

(i)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 \qquad\quad &= 1 \\ 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 &= 2 \\ 2x_3 + x_4 \qquad &= 3 \end{aligned}$$

٣ - كون نظام المعادلات الخطية المناظر لكل من المصفوفات الموسعة التالية :

(i)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

(ii)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

(iii)
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

٤ - أي من المصفوفات التالية في الشكل الصفي المميز المختزل :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٥ - أي من المصفوفات التالية في الشكل الصفي المميز :

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٦ - اعتبر في كل جزء أن المصفوفة الموسعة لنظام المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على الصفوف إلى الشكل الصفي المميز المختزل المعطي حل النظام .

(i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ (ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

(iii) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (iv) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

٧ - اعتبر في كل جزء أن المصفوفة الموسعة لنظام من المعادلات الخطية قد اختزلت بواسطة عمليات على المصفوف إلى الشكل الصفي المميز المعطي حل النظام .

(i) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ (ii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

(iii) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (iv) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

٨ - اختزل المصفوفات التالية إلى الشكل الصفي المميز المختزل .

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

٩ - لكل من الأنظمة الخطية التالية أوجد قيم a التي تجعل النظام الخطي الناتج (أ) له حل وحيد (ب) له عدد لا نهائي من الحلول (حـ) ليس له حل .

ثم أوجد الحل في كل من الحالتين (أ) ، (ب)

(i)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 3 \\ x - y + 3z &= 4 \\ x + y + (a^2 - 10)z &= a \end{aligned}$$

١٠- ادرس إمكانية وجود حل لمجموعات المعادلات التالية :

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

١١- بين ما إذا كان لكل مجموعة من المجموعات التالية حل غير الحل الصفري :

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

١٢- ادرس حل كلاً من الأنظمة التالية :

(i)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$$

١٣ - اذكـر الشـروط الواجب توافـرها على a, b, c لكي تكون مـجـمـوعـة المعادلات الخطية :

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 3x - y + 2z &= b \\ x - 5y + 8z &= c \end{aligned}$$

(أ) لها عدد لا نهائي من الحلول .

(ب) متناقضة

١٤ - لكل من الأنظمة الخطية التالية :

(i)
$$\begin{aligned} x + y + kz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= k \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -3 \\ 2x + ky - z &= -2 \\ x + 2y + kz &= 1 \end{aligned}$$

أوجد قيم k التي تجعل النظام :

(أ) له حل وحيد .

(ب) له عدد لا نهائي من الحلول .

(جـ) ليس له حل .

الباب الثاني

المصفوفـــات

MATRICES

الباب الثاني

المصفوفات

Matrices

تعريف :

تعرف المصفوفة على أنها منظومة مكونة من $m\,n$ من العناصر a_{ij} حيث $j = 1, 2, ..., n$; $i = 1, 2, ..., m$ وتكتب على الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ويقال إنها مصفوفة من النوع $m \times n$ تحتوي على m من الصفوف ، وكل صف يحتوي على n من العناصر , n من الأعمدة وكل عمود يحتوي على m من العناصر حيث m , n أعداد صحيحة موجبة . ويرمز عادة للمصفوفة بالحروف الكبيرة ... A, B, C, كما تستخدم الحروف الصغيرة لعناصر المصفوفة فمثلاً a_{ij} يرمز لأحد عناصر المصفوفة من النوع $m \times n$ الذي يقع في الصف i والعمود j وعلى ذلك يمكن كتابة المصفوفة A على الصورة :

$$A = [a_{ij}] \ , \ 1 \le i \le m \ ; \ 1 \le j \le n.$$

مع ملاحظة أن i ترمز إلى رتبة الصف ، j ترمز إلى رتبة العمود .

مثال (٢ ـ ١) :

مصفوفة من النوع 2 x 3 أي تتكون من صفين وثلاثة أعمدة .

$$(i) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة من النوع 1 x 3 أي تتكون من صف واحد وثلاثة أعمدة .

$$(iii) \quad [3 \quad 2 \quad 7]$$

مصفوفة من النوع 3 x 1 أي تتكون من ثلاثة صفوف وعمود واحد .

$$(ii) \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة من النوع 3 x 3 أي تتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة .

$$(iv) \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

أنواع المصفوفات :

يتحدد نوع المصفوفة على أساس قيم m , n أي على أساس عدد الصفوف ، عدد الأعمدة .

١ - **المصفوفة المستطيلة** : يقال إن المصفوفة مستطيلة إذا كان عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة . أي أن $m \neq n$ على سبيل المثال المصفوفة (i) في مثال (٢ ـ ١) .

٢ - **مصفوفة الصف** : يقال إن المصفوفة مصفوفة الصف إذا كانت تتكون من صف واحد . أي أنها من النوع $1 \times n$ $(m = 1)$ كمثال المصفوفة (ii) في مثال (٢ ـ ١) .

٣ - **مصفوفة العمود** : يقال إن المصفوفة مصفوفة العمود إذا كانت تتكون من عمود واحد . أي أنها من النوع $m \times 1$ $(n = 1)$ كمثال المصفوفة (iii) في المثال (٢ ـ ١) .

٤ - **المصفوفة المربعة** : يقال إن المصفوفة مربعة إذا كان عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة . أي أن $m = n$ على سبيل المثال (iv) في مثال (٢ ـ ١) . وتسمى العناصر $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ **بعناصر القطر الرئيسي** .

٥ - **المصفوفة القطرية** : المصفوفة القطرية هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسي ، أي أن $a_{ij} = 0 \; \forall \; i \neq j$ وإذا كانت عناصر القطر الرئيسي هي $a_1, a_2, \ldots, a_m$ فإنه يمكن كتابة المصفوفة القطرية على الصورة :

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

أو بطريقة مختصرة $D = \text{diag}\;(a_1, a_2, \ldots, a_m)$

مثال (٢ ـ ٢) :

من أمثلة المصفوفات القطرية

$D = \text{diag}\;(0, 4, -2)$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$D = \text{diag}\;(-2, 3).$

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

٦ - **المصفوفة المثلثية العليا** : هي مصفوفة مربعة جميع العناصر أسفل القطر الرئيسي أصفار .

مثال ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

٧ - **المصفوفة المثلثية السفلى** : هي مصفوفة مربعة جميع العناصر أعلى القطر الرئيسي أصفار .

مثال ذلك

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

٨ - **المصفوفة القياسية** : هي مصفوفة قطرية جميع عناصرها القطرية متساوية وعلى سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

٩ - **مصفوفة الوحدة** : هي مصفوفة قطريةجميع عناصر القطر الرئيسي متساوية ويساوي 1 . (أي هي مصفوفة قياسية وعناصرها القطرية المتساوية تساوي 1) . على سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويرمز لها عادة بالرمز I_m إذا كانت تتكون من m من المصفوف , m من الأعمدة فمثلاً :

$$I_2 = \text{diag}\ (1, 1) \quad , \quad I_3 = \text{diag}\ (1, 1, 1).$$

١٠ - **المصفوفة الصفرية** : هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار سواء كانت مستطيلة أو مربعة أو صفاً أو عموداً على سبيل المثال

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , [0 \quad 0 \quad 0] , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \ldots$$

ويرمز لها 0_{mn} حيث m عدد الصفوف , n عدد الأعمدة .

مثال (٢ ـ ٣) :

اكتب عناصر المصفوفة $A = [a_{ij}]$ حيث :

$$a_{ij} = \begin{cases} 3 & i = j \\ -6 & i \neq j \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ; \quad j = 1, 2, 3.$$

حيث إن $j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3$ فتكون المصفوفة A من النوع 3 x 3 أي أنها تتكون من ثلاثة صفوف ، ثلاثة أعمدة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ومن الشرط $a_{ij} = 3$ عندما $i = j$

إذن $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 3$

وكذلك $a_{ij} = -6$ عندما $i \neq j$

إذن $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = -6$

وبالتالي فإن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -6 & 3 & -6 \\ -6 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

العمليات الجبرية على المصفوفات:

١ - تساوي مصفوفتين : تتساوى المصفوفتان $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$

وتكتب $A = B$ إذا - وفقط - إذا كان :

١ - كل من المصفوفتين A, B من نفس النوع أي أن :

(أ) عدد صفوف A = عدد صفوف B

(ب) عدد أعمـــدة A = عدد أعمـدة B

٢ - جميع العناصر المتناظرة متساوية

أي أن لجميع قيم i, j $\quad a_{ij} = b_{ij}$

مثال (٢ ـ ٤) :

المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

غير متساويتان بالرغم أنهما من نفس النوع وذلك لأن $a_{11} \neq b_{11}$

إذن $A \neq B$

المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

متساويتان لأنهما من نفس النوع 3 x 2 وجميع العناصر المتناظرة متساوية في كل منهما .

المصفوفتان $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

غيـر متـسـاويـتـين لأنهـمـا ليس مـن نفس النوع حـيـث إنه A من النوع 2 x 2 , B من النوع 3 x 2 .

مثال (٢ ـ ٥) :

أوجد قيم كل من y , x حتى تتساوى المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x^2 + y^2 \\ y & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان A , B من نفس النوع ولكي تتساوى المصفوفتان يجب أن تتساوى العناصر المتناظرة في كل منهم وعليه فإن :

$$y = x \quad (1) \qquad , \qquad x^2 + y^2 = 2 \qquad (2)$$

بالتعويض من (1) في (2) نجد أن

$$y^2 + y^2 = 2 \qquad 2y^2 = 2 \qquad y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

بالتعويض في (1) نجد أن $x = \pm 1$

إذن لكي تتساوى المصفوفتان فإن $x = \pm 1 , \ y = \pm 1$.

مثال (٢ ـ ٦):

أوجد قيم x , y, z , w إذا علم أن :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y & 2z + w \\ x - y & z - w \end{bmatrix}$$

من شرط التساوي نجد أن $x + y = 3$

$$x - y = 1$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن $x = 2, \ y = 1$

وكذلك $2z + w = 5$

$$z - w = 4$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن $z = 3 \ , \ w = -1$

٢ - **ضرب المصفوفة في مقدار ثابت** : أو ما يسمى بالضرب القياسي . ويعرف الضرب القياسي بأنه إذا كانت لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]$ من النوع $m \times n$ فإنه يعبر عن المصفوفة kA التي أيضاً من النوع $m \times n$ حيث k أي مقدار ثابت هو أن كل عنصر من عناصر المصفوفة A مضروباً في المقدار k .

مثال (٢ - ٧) :

إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$3\,A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 9 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

أيضاً

$$-2\,A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -6 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

٣ - **جمع مصفوفتين** : لجمع المصفوفتين $A = [a_{ij}]\ ,\ B = [b_{ij}]$ يجب أن تكون المصفوفتان من نفس النوع وحاصل الجمع هو المصفوفة $C = [c_{ij}]$ من نفس النوع أيضاً حيث إنه يتم جمع العناصر المتناظرة في كل من A , B .

$$C = A + B$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad 1 \le i \le m \quad ; \quad 1 \le j \le n.$$

$$[c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

مثال (٢ ـ ٨) :

إذا كانت
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0 & 0+2 & 4+1 \\ -1+7 & 3+-6 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال (٢ ـ ٩):

أوجد قيم x , y إذا كان
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

باستخدام جمع المصفوفات فإن
$$\begin{bmatrix} 1+3 \\ -1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

من شرط تساوي مصفوفتين نجد أن
$$x + y = 4$$
$$x - y = 4$$

وبحل هاتين المعادلتين فإن
$$x = 4 \ , \ y = 0$$

٤ - **فرق مصفوفتين** : إذا كانت $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ للحصول على $A - B$ يجب أن تكون المصفوفتان من نفس النوع ويعرف بأنه $A + (-B)$ وينتج عنه مصفوفة $C = [c_{ij}]$ من نفس النوع أيضاً حيث يتم طرح العناصر المتناظرة في كل A, B .

$$C = A - B$$
$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$$
$$[c_{ij}] = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$$

مثال (٢ ـ ١٠):

من مثال (٢ ـ ٨)

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-0 & 0-2 & 4-1 \\ -1-7 & 3-(-6) & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -8 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 8 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

نظرية (٢ ـ ١):

أثبت أنه لأي ثلاثة مصفوفات من النوع $m \times n$

$$A = [a_{ij}] \quad , \quad B = [b_{ij}] \quad , \quad C = [c_{ij}]$$

أن $i = 1, 2, \dots, m \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n$

(i) $A + B = B + A$

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$

أي أن عملية جمع المصفوفات إبدالية ودامجة (تجميعية) .

البرهـــــان :

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$$

$$= [a_{ij} + b_{ij}] \qquad (1)$$

$$B + A = [b_{ij}] + [a_{ij}]$$

$$= [b_{ij} + a_{ij}] \qquad (2)$$

وبما أن $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ لجميع قيم $j = 1, 2, \dots, n$ ، $i = 1, 2, \dots, m$

فإنه من (2) , (1) نجد أن $A + B = B + A$

$$(A+B)+C = ([a_{ij}+b_{ij}]) + [c_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}] \qquad (3)$$

$$A+(B+C) = [a_{ij}] + ([b_{ij}+c_{ij}]) = [a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}] \qquad (4)$$

من (4) ، (3) نجد أن $(A+B)+C = A+(B+C)$

تعريـــف :

لأي مصفوفة A يعرف معكوسها (نظيرها) الجمعي A – حيث $-A = (-1)\,A$ حيث إنه حاصل جمع مصفوفة ونظيرها يساوي المصفوفة الصفرية التي من نفس النوع .

مثال (٢ ـ ١١) :

إذا كان
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن
$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A+(-A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 & 1-1 \\ -1+1 & 0-0 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{23}$$

٥ – ضرب مصفوفتين : إذا كانت لدينا المصفوفتان A , B فإنه للحصول على حاصل الضرب $AB = A \times B$ يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B .

أي أنه إذا كانت $A = [a_{il}]$ من النوع $m \times p$ ، $1 \le l \le p$ ، $1 \le i \le m$

والمصفـوفـة $B = [b_{lj}]$ من النوع $p \times n$ ، $1 \le j \le n$ ، $1 \le l \le p$

فإنه تعرف المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب A B بأنها المصفوفة

$$C = [c_{ij}] \quad , \; 1 \le i \le m \; ; \; 1 \le j \le n$$

حيث

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \, b_{lj}$$

أي أن المصفوفة C من النوع $m \times n$. حيث إنه يتم ضرب العناصر المتناظرة من الصف i في المصفوفة A مع العمود j من المصفوفة B ثم جمع حواصل الضرب للحصول على العنصر c_{ij} من المصفوفة C .

$$c_{ij} = a_{il} \, b_{lj} + a_{i2} \, b_{2j} + \dots + a_{ip} \, b_{pj} \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le i \le n.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أنه إذا كانت المصفوفتان [B] x [A]

من النوع $p \times n$ $m \times p$

فإن المصفوفة [C]

من النوع $m \times n$

ملاحظات هامة :

إن الخواص الجبرية لجمع المصفوفات قد وصفت في نظرية (٢ ـ ١) وهي مشابهة للخواص الجبرية لجمع الأعداد الحقيقية . ولكن ضرب المصفوفات يتطلب عناية أكثر دقة من عملية الجمع حيث إن بعض الخواص الجبرية لضرب المصفوفات تختلف عَمَّا هو متحقق في ضرب الأعداد الحقيقية كما يتضح من النقاط التالية :

١ - إذا كانت A مصفوفة من النوع $m \times p$ ، و B مصفوفة من النوع $p \times n$ فإن مصفوفة حاصل الضرب AB معرفة ويكون الناتج مصفوفة من النوع $m \times n$.
ولكن BA ممكن أن يكون إحدى الحالات الآتية :

(أ) B A غير معرف إذا كانت $m \neq n$.

(ب) B A معرف إذا كانت $m = n$ ويكون مصفوفة من النوع $p \times p$ بينما المصفوفة AB من النوع $m \times m$ ، أي أن AB, BA مصفوفتان مختلفتا النوع .

(جـ) إذا كانت AB, BA مصفوفتين من نفس النوع أمكن أن يكونا غير متساوين .

مثال (٢ ـ ١٢):

إذا كانت A مصفوفة من النوع 2 x 3 ، و B مصفوفة من النوع 3 x 4 فإن المصفوفة AB تكون من النوع 2 x 4 بينما BA غير معرف .

مثال (٢ ـ ١٣):

إذا كانت A مصفوفة من النوع 2 x 3 ، و B مصفوفة من النوع 3 x 2 فإن المصفوفة AB تكون من النوع 2 x 2 بينما المصفوفة BA من النوع 3 x 3 .

مثال (٢ ـ ١٤):

بفرض المصفوفتين $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

فإن المصفوفتين AB, BA تكونان من النوع 2 x 2

حيث $BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

أي أن $AB \neq BA$

٢ - بالنسبة لضرب الأعداد نجد أن :

$a.\ b = 0$ حيث $a,\ b \in \mathbb{R}$ إذا كان a أو b يساوي الصفر . ولكن هذه الخاصية غير متحققة في حالة ضرب المصفوفات ، أي أنه قد يكون ناتج حاصل ضرب مصفوفتين AB مصفوفة صفرية بينما A, B ليس أي منهما مصفوفة صفرية .

مثال (٢ ـ ١٥) :

إذا كان لدينا المصفوفتان

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

حيث $A \neq 0,\ B \neq 0$ ولكن $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

٣ - خاصية الاختزال (الحذف) متحققة في حالة ضرب الأعداد الحقيقية

أي أنه إذا كان $ab = ac$, $a \neq 0$ فإن $b = c$ حيث $a, b, c, \in \mathbb{R}$

ولكن هذه الخاصية غير متحققة في ضرب المصفوفات .

مثال (٢-١٦):

بفرض المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

فـإن

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix}$$

بينما $B \neq C$

مثال (٢-١٧) :

إذا كانت $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ فأوجد كلاً من

BA , AB إن أمكن . المصفوفـة A من النوع 2 x 2 والمصفوفة B من النوع 2 x 3 فإن حاصل الضرب AB هو المصفوفة C التي من النوع 2 x 3

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 3 - 1 \times (-1) & 2 \times 2 - 1 \times 8 & 2 \times 4 - 1 \times 5 \\ 0 \times 3 + 3 \times (-1) & 0 \times 2 + 3 \times 8 & 0 \times 4 + 3 \times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & -4 & 13 \\ -3 & 24 & 15 \end{bmatrix}$$

وبما أن عـدد أعـمدة B لا تساوي عـدد صفـوف A فإنه لا يمكن إيجاد

حاصل الضرب BA . نلاحظ من ذلك أنه $AB \neq BA$ حتى في الحالات التي يمكن الحصول على كل من AB , BA فليس من الضروري أن يكون AB , BA من نفس النوع . وبالتالي لا يمكن تحقيق شرط التساوي .

مثال ذلك : إذا كانت A من النوع 2 x 3 ، B من النوع 3 x 2 فإن المصفوفة AB من النوع 2 x 2 أما المصفوفة BA فتكون من النوع 3 x 3 .

نظرية (٢ ـ ٢) :

إذا كان لدينا المصفوفات

$A = [a_{ij}]$ من النوع $m \times n$ ، $B = [b_{jk}]$ من النوع $n \times p$ ، $C = [c_{kl}]$ من النوع $p \times q$ فإن :

$$(AB)\,C = A\,(BC)$$

حيث $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,\ 1 \leq k \leq p,\ 1 \leq l \leq q$

فإن $AB = D = [d_{ik}]$

حيث $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$

كذلك $BC = E = [e_{jl}]$

حيث $e_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}\, c_{kl}$

$$(AB)\,C = DC = [d_{ik}]\,[c_{kl}] = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}\, c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right) c_{kl}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kl} \qquad (1)$$

$$A\,(BC) = AE = [a_{ij}]\,[e_{jl}] = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, e_{jl}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}\, c_{kl}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\, c_{kl} \qquad (2)$$

من (2) ، (1) نجد أن $A\,(BC) = (AB)\,C$

نتائج :

١ - إذا كانت $1 \le j \le n$ ، $1 \le i \le m$ ، $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ji}]$

أي أن المصفوفة A من النوع $m \times n$ ، والمصفوفة B من النوع $n \times m$ فإن المصفوفتين BA ، AB مصفوفتان مربعة من النوع $n \times n$ ، $m \times m$ على الترتيب .

٢ - إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $AI = IA = A$

حيث I هي مصفوفة الوحدة من نفس نوع المصفوفة A .

تعريف :

لأي عددين صحيحين موجبين m, n ولأي مصفوفة مربعة A نجد أن :

(i) $A^n = \underbrace{A.\,A.\,\dots\,.A}_{n\text{ ـ من المرات}}$

(ii) $A^0 = I_n$

(iii) $A^m\,.\,A^n = A^{m+n}$

(iv) $(A^m)^n = A^{mn}$

مثال (٢ ـ ١٨):

أوجد A^3 إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A.\,A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2.\,A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -11 \\ 22 & -9 \end{bmatrix}$$

مما سبق نلاحظ أنه إذا كانت A, B مصفوفتين من النوع $m \times n$ فإنه يمكن إثبات أن :

(i) $A + 0_{mn} = 0_{mn} + A = A$

(ii) $A - A = 0_{mn}$

(iii) $k(A+B) = kA + kB$

(iv) $(k_1 + k_2)A = k_1 A + k_2 A$

(v) $(k_1 \ k_2) A = k_1 (k_2 A)$

لأي قيم ثابتة k, k_1, k_2

(يترك للدارس كتمرين)

تعريـــف:

إذا كانت المصفوفة A من النوع $m \times n$ فإن المصفوفة الناتجة من تحويل صفوف A إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف تسمى بمدور المصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^T وتكون من النوع $n \times m$.

على سبيل المثال إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

فـــإن

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

تعريـــف:

تعرف المصفوفة A أنها متماثلة إذا - وفقط إذا - كان :

$$A = A^T$$

تعريـــف :

تعرف المصفوفة A أنها شبه متماثلة إذا - وفقط إذا - كان :

$$A = -A^T$$

ومن هذين التعريفين نجد أنه لكي تكون المصفوفة A متماثلة أو شبه متماثلة يجب أن تكون مصفوفة مربعة .

أي أنه إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من النوع $m \times m$ فإن A تكون متماثلة إذا - وفقط إذا - كان $a_{ij} = a_{ji}$ لجميع قيم i, j

حيث $1 \le j \le m \quad , \quad 1 \le i \le m$

وتكون شبه متماثلة إذا - وفقط إذا - كان $a_{ij} = -a_{ji}$ لجميع قيم i, j

حيث $1 \le j \le m \quad , \quad 1 \le i \le m$

نظرية (٢ ـ ٣):

العناصر القطرية في المصفوفة شبه المتماثلة جميعها أصفار .

البرهان:

نفرض $A = [a_{ij}]$ من النوع $m \times m$ مصفوفة شبه متماثلة

إذن $\forall \ i, j = \{1, 2, \ldots, m\} \qquad a_{ij} = -a_{ji}$

وعند $i = j$ أي للعناصر القطرية فإن $\forall \ i \qquad a_{ii} = -a_{ii}$

$$2\,a_{ii} = 0$$

إذن $\forall \ i = \{1, 2, \ldots, m\}. \qquad a_{ii} = 0$

وبالتالي فإن جميع العناصر القطرية أصفار في المصفوفة شبه المتماثلة .

نظرية (٢ ـ ٤) :

إذا كان كل من A, B مصفوفة ، و k أي عدد حقيقي فإن :

(i) $(A^T)^T = A$　　(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(kA)^T = kA^T$　　(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

البرهان:

لإثبات (i) نفرض : $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$

إذن $A^T = [a_{ji}]$ مصفوفة من النوع $n \times m$

وبالتالي $(A^T)^T = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$

إذن $(A^T)^T = A$

لإثبات (ii) نفرض $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من النوع $m \times n$

إذن $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}]$

حيث $C = [c_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$

(1) $(A+B)^T = [c_{ji}]$

مصفوفة من النوع $n \times m$.

وبما أن $A^T = [a_{ji}]$, $B^T = [b_{ji}]$ مصفوفتان من النوع $n \times m$

(2) $A^T + B^T = [a_{ji}] + [b_{ji}] = [a_{ji} + b_{ji}] = [c_{ji}]$

مصفوفة من النوع $n \times m$. من (2) , (1) نجد أن :

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

لإثبات (iii) نفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$

إذن $kA = [ka_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$.

إذن $(kA)^T = [k\, a_{ji}] = k\, [a_{ji}] = k\, A^T$

مصفوفة من النوع $n \times m$.

لإثبات (iv) نفرض $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$
، $B = [b_{jl}]$ مصفوفة من النوع $n \times p$

بما أن $AB = C = [c_{il}]$

حيث $c_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jl}$

إذن $c^T_{il} = c_{li} = \sum_{j=1}^{n} a_{lj}\, b_{ji}$

$$a_{lj} = a^T_{jl}\ ,\ b_{ji} = b^T_{ij}$$

$$c^T_{il} = \sum_{j=1}^{n} a^T_{jl}\, b^T_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b^T_{ij}\, a^T_{jl}$$

إذن $(AB)^T = B^T\, A^T.$

نظرية (٢ ـ ٥):

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن $A + A^T$ مصفوفة متماثلة ، $A - A^T$ مصفوفة شبه متماثلة .

البرهان:

نفرض أن $B = A + A^T$

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + A$$

$$B^T = A + A^T = B$$

$$B^T = B$$

إذن B مصفوفة متماثلة وبالتالي فإن $A + A^T$ مصفوفة متماثلة .

نفرض أن $C = A - A^T$

$$C^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T$$
$$= A^T - A = -(A - A^T)$$
$$C^T = -C$$

إذن C مصفوفة شبه متماثلة وبالتالي فإن $A - A^T$ مصفوفة شبه متماثلة .

نظرية (٢ ـ ٦):

أي مصفوفة مربعة يمكن كتابتها على صورة حاصل جمع مصفوفتين إحداهما متماثلة والأخرى شبه متماثلة .

البرهان:

نفرض A مصفوفة مربعة والمطلوب كتابتها على الصورة $A = B + C$ ، حيث B مصفوفة متماثلة ، C مصفوفة شبه متماثلة .

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T + A - A^T)$$
$$= \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = B + C$$

حيث $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ مصفوفة متماثلة (نظرية «٢ ـ ٥») .

، $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ مصفوفة شبه متماثلة (نظرية «٢ ـ ٥») .

تعريـــف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المصفوفة المربعة B من نفس النوع والتي تحقق الخاصية : $AB = BA = I$

تسمى المصفوفة العكسية (معكوس) للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز A^{-1} حيث I هي وحدة المصفوفات (مصفوفة الوحدة) من نفس النوع .

نظرية (٢ ـ ٧):

المصفوفة العكسية A^{-1} للمصفوفة A وحيدة .

البرهان:

نفرض أن المصفوفتين A_1^{-1} , A_2^{-1} كل منهما معكوس للمصفوفة A .

أي أن $A_2^{-1} A = A A_2^{-1} = I \quad , \quad A_1^{-1} A = AA_1^{-1} = I$

$$A_1^{-1} = A_1^{-1}. I = A_1^{-1} (A A_2^{-1}) = (A_1^{-1} A) A_2^{-1} = I. A_2^{-1} = A_2^{-1}$$

$$A_2^{-1} = I. A_2^{-1} = (A_1^{-1} A) A_2^{-1} = A_1^{-1} (A A_2^{-1}) = A_1^{-1}. I = A_1^{-1}$$

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}$$

إذن للمصفوفة A معكوس واحد وواحد فقط .

نظرية (٢ ـ ٨):

إذا كانت A, B مصفوفتين مربعتين من نفس النوع وقابلتين للانعكاس

فإن $(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

أي أن $B^{-1} A^{-1}$ هو معكوس المصفوفة $A B$

البرهان:

$$\begin{aligned} (A B) (B^{-1} A^{-1}) &= A (B B^{-1}) A^{-1} \\ &= A I A^{-1} \\ &= A A^{-1} = I \qquad (1) \end{aligned}$$

بالمثل

$$\begin{aligned} (B^{-1} A^{-1}) (A B) &= B^{-1} (A^{-1} A) B \\ &= B^{-1} I B \\ &= B^{-1} B = I \qquad (2) \end{aligned}$$

مـــن (2) , (1) نجد أن

$$(A B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

نتيجة:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مصفوفات مربعة من نفس النوع ومعكوساتها على الترتيب $A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_n^{-1}$ فإن

$$(A_1 A_2 \ldots A_n)^{-1} = A^{-1}{}_n \; A^{-1}{}_{n-1} \ldots A_2^{-1} \; A_1^{-1}$$

أي أن معكوس حاصل ضرب عدة مصفوفات يساوي حاصل ضرب المعكوسات في ترتيب عكسي .

المصفوفات البسيطة وطريقة لإيجاد A^{-1}

تعريـــف:

أي مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ تسمى مصفوفة بسيطة إذا أمكن الحصول عليها من مصفوفة الوحدة I_n بإجراء عملية بسيطة (أولية) واحدة على الصفوف .

مثال (٢ ـ ١٩):

في هذا المثال نستعرض ثلاث مصفوفات بسيطة والعمليات التي أوجدتها :

(أ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (جـ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(أ) إبدال الصفين الثاني والرابع من I_4 .

(ب) ضرب الصف الثاني من I_2 في -3.

(جـ) إضافة ثلاثة أمثال الصف الثالث من I_3 إلى الصف الأول .

ولإيجاد معكوس المصفوفة A وذلك باختزال A إلى I_n حيث A من

النوع $n \times n$ بواسطة العمليات البسيطة على صفوف A وفي نفس الوقت على صفوف I_n ، وذلك حتى نحصل على A^{-1} ويمكن ذلك بإلحاق مصفوفة الوحدة إلى اليمين من المصفوفة A $[A | I_n]$ وتطبيق العمليات على صفوف كلا الطرفين حتى يختزل الطرف الأيسر إلى I_n وتكون المصفوفة النهائية هي $[I_n | A^{-1}]$ أي أن المصفوفة التي على اليمين هي معكوس المصفوفة A .

مثال (٢ – ٢٠):

أوجد معكوس المصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -\ R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to 2R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to (-1)R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to 3R_3 + R_2 \\ R_1 \to -2R_2 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 9 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad R_1 \to -9R_3 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال (٢ – ٢١) :

أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to -\frac{1}{4} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{1}{6} R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right] \quad R_1 \to \frac{3}{4} R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

في العديد من الحالات لا يمكن المعرفة كون المصفوفة قابلة للانعكاس أم لا . ولكن عند إجراء المحاولة بالأسلوب المستخدم في الأمثلة السابقة على مصفوفة غير قابلة للانعكاس فلا يمكن اختزال الطرف الأيسر إلى مصفوفة الوحدة بواسطة العمليات على الصفوف إذ يحدث في إحدى مراحل الاختزال أن يظهر صف من الأصفار في الطرف الأيسر وبالتالي تكون هذه المصفوفة غير قابلة للانعكاس وتعرف بالمصفوفة المنعزلة (المنفردة) ويمكن إيقاف العمليات عند هذه الخطوة كما يتضح من المثال التالي :

مثال (٢ – ٢٢):

ادرس إمكانية وجود معكوس للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to \quad R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نلاحظ أننا حصلنا عند هذه الخطوة على صف من الأصفار في الطرف الأيسر فتكون A مصفوفة غير قابلة للانعكاس (أي ليس لها معكوس) .

حل المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة:

نفرض لدينا عدد n من المعادلات الخطية في n من المجاهيل على الصورة

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad & \quad \vdots \quad\; \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

نلاحظ مما سبق أنه يمكن كتابة هذه المعادلات باستخدام المصفوفات على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2)$$

أو بصورة مختصرة

$$AX = B \qquad (3)$$

حيث A مصفوفة المعاملات ، X مصفوفة المجاهيل ، B مصفوفة الحدود المطلقة من النوع $n \times 1$ ، $n \times 1$ ، $n \times n$ على الترتيب .

ويمكن إيجاد حل وحيد لمثل هذه المعادلات (أي إيجاد قيم المجاهيل) باستخدام المصفوفات بشرط أن تكون المصفوفة A قابلة للانعكاس (أي يمكن إيجاد معكوس لها A^{-1}) .

بضرب طرف المعادلة (3) من جهة اليسار في معكوس المصفوفة A^{-1} نحصل على

$A^{-1}(AX) = A^{-1} B$ من خاصية التجميع

$(A^{-1}A) X = A^{-1} B$ من خاصية المعكوس الضربي

من تعريف مصفوفة الوحدة $\quad I_n X = A^{-1} B$

$$X = A^{-1} B \qquad (4)$$

المعادلة (4) تمثل حل مجموعة المعادلات (1) حيث إنه يمكن كتابة (4) على الصورة :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وبما أن المصفوفة A^{-1} من النوع $n \times n$ والمصفوفة B من النوع $n \times 1$ فإنه بضرب المصفوفتين في الطرف الأيمن من المعادلة (5) فإننا نحصل على مصفوفة مستطيلة من النوع $n \times 1$ وباستخدام خاصية التساوي بين هذه المصفوفة والمصفوفة X في الطرف الأيسر للمعادلة (5) يمكن إيجاد قيم المجاهيل $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

مثال (٢ – ٢٣):

حل المعادلتين

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

حيث : $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

لإيجاد معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_1 & b_1 & 1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R_1 \to \frac{1}{a_1} \times R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad R_2 \to -a_2 R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 1 \\ 0 & \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1} & \frac{-a_2}{a_1} & 1 \end{array}\right] \qquad R_2 \to \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \times R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{array}\right] \qquad R_1 \to -\frac{b_1}{a_1} \times R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ 0 & 1 & \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad , \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

مثال (٢ – ٢٤):

حل المعادلتين

$$3\,x_1 - 2\,x_2 = 5$$

$$3\,x_1 + 4\,x_2 = 7$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

لإيجاد معكوس المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \rightarrow \frac{1}{3} R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \rightarrow -3\,R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \rightarrow \frac{1}{6} R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right] \quad R_1 \rightarrow \frac{2}{3} R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} + \frac{7}{9} \\ \frac{5}{6} + \frac{7}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{9} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{17}{9} \quad , \quad x_2 = \frac{1}{3} \cdot$$

مثال (٢ – ٢٥):

ادرس إمكانية حل مجموعة المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 &= 3 \\ x_1 \qquad\quad + 8\,x_3 &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

وبما أن هذا المعكوس قد سبق الحصول عليه من مثال (٢ ـ ٢٠)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = 2$

مثال (٢-٢٦):

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات

$$x + 3y + 2z = 1$$
$$2x - y - z = 6$$
$$3x - y - 5z = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

لإيجاد معكوس المصفوفة

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \to \frac{-1}{7} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & -10 & -11 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 \to 10R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-27}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-10}{7} & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to -3 \quad R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-27}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-10}{7} & 1 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{7}{-27} \; R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-7}{27} \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{-5}{7} \; R_3 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{-1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{27} & \frac{-11}{27} & \frac{5}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-7}{27} \end{array}\right] \quad R_1 \to \frac{1}{7} \; R_3 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-1}{27} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{27} & \frac{-11}{27} & \frac{5}{27} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-7}{27} \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-1}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{-11}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-7}{27} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{27} & \frac{13}{27} & \frac{-1}{27} \\ \frac{7}{27} & \frac{-11}{27} & \frac{5}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{10}{27} & \frac{-7}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 + 78 - 1)/27 \\ (7 - 66 + 5)/27 \\ (1 + 60 - 7)/27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81/27 \\ -54/27 \\ 54/27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن $x = 3 \quad , \quad y = -2 \quad , \quad z = 2$

ملاحظة:

نظام المعادلات الخطية المتجانسة $A X = 0$ يكون :

١ - له حل وحيد (الحل الصفري) إذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس .

٢ - له عدد لانهائي من الحلول إذا كانت المصفوفة A غير قابلة للانعكاس .

تمـــاريــــــن (٢)

١ - إذا كـانت $A = [a_{ij}]$ مصـفـوفـة من النوع 3×4 بحيث إن $a_{ij} = 3i - j$
فاكتب عناصر هذه المصفوفة .

٢ - إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من النوع 3×3 بحيث إن :

$a_{ij} = \begin{cases} -4 & i \neq j \\ 6 & i = j \end{cases}$ فاكتب عناصر هذه المصفوفة .

٣ - إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من النوع 3×5 اكتب عناصر هذه المصفوفة
في كل من الحالات التالية :

(i) $a_{ij} = (-1)^{i+j-1}$

(ii) $a_{ij} = i^2 + 5j$

(iii) $a_{ij} = 3i + 4j$

(iv) $a_{ij} = 2i - j$

(v) $a_{ij} = \begin{cases} 3 & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}$

(vi) $a_{ij} = \begin{cases} 0 & i + j < 7 \\ -1 & i + j \geq 7 \end{cases}$

٤ - أوجد قيم المجاهيل في كل من الحالات التالية :

(i) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & c \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 2a+6 & 3b-7 & 2c-3 \\ 2d & 4e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 2x+1 & 2 \\ 3y-4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

٥ - إذا كانت $B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ أثبت أن $AB \neq BA$

٦ - إذا كانت $C=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

أثبت أن $AB = AC$.

٧ - إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

فأوجد كلاً من :

(i) $A-B$ (ii) $3A-4B$ (iii) $A+B$ (iv) $-6(2A+B)$.

٨ - إذا كانت $A = [4 \quad -5i \quad 8]$ فأوجد كلاً من :

(i) $-A$ (ii) iA (iii) $-iA$ حيث $i=\sqrt{-1}$

٩ - إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4-3i & i & -2i \\ 1 & 0 & 3i \\ 2+i & 5 & -3-i \end{bmatrix}$$

فأوجد كلاً من

(i) iA (ii) $-A$ (iii) $I_3 - iA$ (iv) $2A + 3I_3$
(v) $I_3 - A$ (vi) $A + I_3$.

١٠- نفرض أن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} , \quad E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

احسب كلاً مما يلي إن أمكن :

(1) $A(BD)$, $(AB)D$ (2) $2B - 3F$

(3) $A(C+E)$, $AC + AE$ (4) $EB + FA$

(5) $3A + 2A$, $5A$ (6) A^T , $(A^T)^T$

(7) $(C+E)^T$, $C^T + E^T$ (8) $(AB)^T$, $B^T A^T$

(9) $(2D + 3F)^T$ (10) $(2BC + F)^T$

(11) $B^T C + A$ (12) $(2E) A^T$

(13) $(B^T + A)C$ (14) $(D^T + E)F$

١١- حقق نظرية (٢ - ١) إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

١٢- حقق نظرية (٢ - ٢) إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

١٣- حقق نظرية (٢ - ٤) إن أمكن عندما

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} , \quad k = -4$$

١٤- أوجد A^{-1} لكل من المصفوفات التالية :

(i) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

١٥- أوجد حل المعادلات التالية باستخدام معكوس المصفوفة :

(i) $x - y - 7 = 0$, $3x + 2y + 4 = 0$

(ii) $15x - 14y = -13$, $7x - 6y = -5$

(iii) $x + y - z = 1$, $2x + y + z = 7$, $x - 5y + 3z = 3$

(iv) $2x + 3y + z = 4$, $4x - 6y + z = 7$, $6x - 3y - 2z = 2$

(v) $x + y = 4$, $2x + y - z = 0$, $x + 2y + 2z - 11 = 0$

١٦ - إذا كانت A , B , C مصفوفات بحيث تكون العمليات المعرفة قابلة للأداء برهن على أن :

(i) $A(B + C) = AB + AC$

(ii) $(B + C)A = BA + CA$

١٧- إذا كانت A مصفوفة قابلة للانعكاس فأثبت أن :

أ - A^{-1} قابلة للانعكاس وأن $(A^{-1})^{-1} = A$

ب - A^n قابلة للانعكاس بـ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ لقيم $n = 0, 1, 2, \ldots$

جـ - لأي عدد قياس k وغير صفري ، kA قابلة للانعكاس وأن :

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

د - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

١٨- افترض أن A مصفوفة مربعة تحقق $A^2 - 3A + I = 0$ أثبت أن :

$$A^{-1} = 3I - A$$

١٩- أثبت أنه إذا كانت المصفوفة A قابلة للانعكاس وكان :

$AB = AC$ فإن $B = C$

٢٠ - ليكن $AX = 0$ نظاماً متجانساً ذا n معادلة خطية في n مجهولاً ولتكن Q مصفوفة قابلة للانعكاس . أثبت أن للنظام $AX = 0$ الحل الصفري فقط إذا - وفقط إذا - كان للنظام $(QA)X = 0$ الحل الصفري فقط .

٢١ - افرض أن A مصفوفة $n \times n$. أثبت أن النظام المتجانس $AX = 0$ يكون له حل غير صفري إذا - وفقط إذا - كانت A مصفوفة غير قابلة للانعكاس .

٢٢ - بفرض أن : $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 3 & 0 \\ 1 & u \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & y & 2 \\ 3 & 0 & z \end{bmatrix}$

فما هي قيمة كل من u, x, y, z إذا علم أن :

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

٢٣ - أوجد حلاً - غير الحل الصفري - للنظام المتجانس $(-4I_3 - A)X = 0$ إذا علم أن :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

٢٤ - أثبت أنه إذا كانت كل من A , B مصفوفتين متماثلتين فإن $(A + B)$ مصفوفة متماثلة ، و AA^T مصفوفة متماثلة .

الباب الثالث

المحـــددات

DETERMINANTS

الباب الثالث

المحـــــددات

Determinants

تعريــف:

نفرض المجموعة $S = \{1, 2, \dots, n\}$ لمجموعة الأعداد الصحيحة من 1 إلى n مرتبة ترتيباً تصاعدياً . فأي ترتيب $j_1, j_2, \dots, j_n$ لعناصر هذه المجموعة S في أي تسلسل ما دون حذف أو تكرار تسمى **تبديلة** لهذه المجموعة S .

ويلاحظ أنه يمكننا أن نضع أي عنصر من عناصر المجموعة S في الموضع الأول ، أي عنصر من $n-1$ الباقي في الموضع الثاني ، أي عنصر من $n-2$ الباقي في الموضع الثالث وهكذا حتى الموضع النوني الذي نضع فيه آخر عنصر باق ولذلك يوجد هناك عدد :

$$n.(n-1).(n-2).\dots 2.1 \qquad (1)$$

تبديلة للمجموعة S . أي أن عدد التبديلات الممكنة لهذه المجموعة يساوي مضروب n ($n!$) على سبيل المثال :

$$1! = 1$$

$$2! = 2.1 = 2$$

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

سوف نرمز لأي تبديلة على المجموعة $\{1,2, \dots , n\}$ بالرمز $(j_1, j_2, \dots , j_n)$ حيث j_1 هو العدد الأول في التبديلة ، j_2 العدد الثاني وهكذا . يقال إن **انعكاساً** قد حدث في التبديلة كلما تقدم رقم أكبر رقمًا أصغر ويمكن الحصول على العدد الكلي للانعكاسات بأن نوجد عدد الأرقام الأصغر من j_1 والتي تلو j_1 في التبديلة ثم نوجد عدد الأرقام الأصغر من j_2 والتي تلو j_2 في التبديلة ثم نواصل عملية عد هذه الأرقام للأرقام $j_3 , \dots , j_{n-1}$ فيكون مجموع هذه الأرقام هو العدد الكلي للانعكاسات في التبديلة .

تعريـــف:

تسمى التبديلة زوجية إذا كان العدد الكلي للانعكاسات عدداً زوجياً وتسمى تبديلة فردية إذا كان العدد الكلي للانعكاسات عدداً فردياً .

مثال (٣-١):

أوجد العدد الكلي للانعكاسات في التبديلات التالية وتصنيف كل منها زوجية أو فردية :

(i) (6, 1, 3, 4, 5, 2) (ii) (4, 3, 1, 2) (iii) (1, 2, 3, 4)

(iv) (5, 4, 1, 2, 3) (v) (1, 4, 5, 3, 2)

(i) العدد الكلي للانعكاسات $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$

إذن التبديلة زوجية

(ii) العدد الكلي للانعكاسات $3 + 2 + 0 = 5$

إذن التبديلة فردية

(iii) العدد الكلي للانعكاسات $0 + 0 + 0 = 0$

أي لا يوجد انعكاس في هذه التبديلة ـ التبديلة زوجية .

(iv) العدد الكلي للانعكاسات $4+3+0+0=7$

إذن التبديلة فردية

(v) العدد الكلي للانعكاسات $0+2+2+1=5$

إذن التبديلة فردية

مثال (٣–٢):

إذا كانت $S = \{1, 2\}$ فإن التبديلات المختلفة لهذه المجموعة هما :

(١) $(1, 2)$ وهي زوجية حيث إن عدد الانعكاسات يساوي صفر .

(٢) $(2, 1)$ وهي فردية حيث إن عدد الانعكاسات يساوي واحداً .

إذا كانت $S = \{1, 2, 3\}$ فإن التبديلات المختلفة على هذه المجموعة :

(١)	$(1, 2, 3)$	زوجية	عدد الانعكاسات الكلي $= 0$
(٢)	$(1, 3, 2)$	فردية	عدد الانعكاسات الكلي $= 1$
(٣)	$(2, 1, 3)$	فردية	عدد الانعكاسات الكلي $= 1$
(٤)	$(2, 3, 1)$	زوجية	عدد الانعكاسات الكلي $= 2$
(٥)	$(3, 1, 2)$	زوجية	عدد الانعكاسات الكلي $= 2$
(٦)	$(3, 2, 1)$	فردية	عدد الانعكاسات الكلي $= 3$

تعريف:

نفرض لدينا المصفوفة المربعة A من النوع $n \times n$ فإنه يعرف **حاصل الضرب الأولي** من A أي حاصل ضرب لعدد n من عناصر A بحيث لا يكون أي اثنين من هذه العناصر من نفس الصف أو من نفس العمود .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال (٣ – ٣):

اذكر كل حواصل الضرب الأولية من المصفوفتين

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(i) حيث إنه يوجد عاملان لكل حاصل ضرب أولي وحيث إن كل عامل يأتي من صف مختلف فيمكن كتابة أي حاصل ضرب أولي على الصورة :

$$a_{1-}\,a_{2-}$$

حيث موضع الشرطة يشير إلى رقم العمود وحيث إنه لا يأتي أي عنصرين في حاصل الضرب من نفس العمود فأرقام الأعمدة يجب أن لا تتكرر وبالتالي فإن أرقام الأعمدة تمثل جميع التبديلات على المجموعة $\{1,2\}$ السابق ذكرها وعددها $2!$ ولذلك يكون :

$$a_{11}\,a_{22} \quad , \quad a_{12}\,a_{21}$$

هما حاصلا الضرب الأوليان الوحيدان لهذه المصفوفة .

(ii) في هذه الحالة لكل حاصل ضرب أولي له ثلاثة عوامل كل عامل يأتي من صف مختلف يمكن كتابة أي حاصل ضرب أولي على الصورة :

$$a_{1-}\,a_{2-}\,a_{3-}$$

وحيث إنه لا يأتي أي عنصريين في حاصل الضرب من نفس العمود أي لا يجب أن تتكرر أرقام الأعمدة وبالتالي فإن أرقام الأعمدة يجب أن تكون جميع

التبديلات على المجموعة $\{1, 2, 3\}$ السابق ذكرها وعددها $3! = 6$ فنحصل على حواصل الضرب الأولية :

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \quad , \quad a_{11}\, a_{23}\, a_{32} \quad , \quad a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$$

$$a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \quad , \quad a_{13}\, a_{21}\, a_{32} \quad , \quad a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$$

من هذا المثال يتضح أنه لأي مصفوفة A من النوع $n \times n$ عدد $n!$ من حواصل الضرب الأولية .

تعريـــف:

يتضح من التعريف السابق أن حواصل الضرب التي على الصورة

$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ حيث $(j_1 , j_2 , \dots , j_n)$ تبديلة للمجموعة $\{1, 2, \dots , n\}$
فإننا نعرف **حاصل ضرب أولي مميز من A** أي حاصل الضرب

$a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ مضروباً في $+1$ أو -1 . يستخدم $+1$ إذا كانت التبديلة $(j_1 , j_2 , \dots , j_n)$ تبديلة زوجية ونستخدم -1 إذا كانت التبديلة $(j_1 , j_2 , \dots , j_n)$ تبديلة فردية .

مثال (٣ – ٤):

اذكر كل حواصل الضرب الأولية المميزة للمصفوفات المذكورة في مثال (٣ – ٣) :

(i)

حاصل الضرب الأولي	التبديلة المرافقة	نوعها	حاصل الضرب الأولي المميز
$a_{11} a_{22}$	$(1, 2)$	زوجية	$a_{11} a_{22}$
$a_{12} a_{21}$	$(2, 1)$	فردية	$-a_{12} a_{21}$

$a_{11}a_{22}a_{33}$	زوجية	(1, 2, 3)	$a_{11}a_{22}a_{33}$	(ii)
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	فردية	(1, 3, 2)	$a_{11}a_{23}a_{32}$	
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	فردية	(2, 1, 3)	$a_{12}a_{21}a_{33}$	
$a_{12}a_{23}a_{31}$	زوجية	(2, 3, 1)	$a_{12}a_{23}a_{31}$	
$a_{13}a_{21}a_{32}$	زوجية	(3, 1, 2)	$a_{13}a_{21}a_{32}$	
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	فردية	(3, 2, 1)	$a_{13}a_{22}a_{31}$	

تعريـــف:

نفرض لدينا مصفوفة $A = [a_{ij}]$ مـن النوع $n \times n$ فإننا نعرف **دالة المحدد (قيمة المحدد أو مفكوك المحدد) للمصفوفة A** بأنه حاصل جمع كل حواصل الضرب الأولية المميزة من A ويرمز له بالرمز $det\,(A)$ (أو $|A|$ أو Δ)

أي أن
$$|A| = \sum (\pm)\, a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

ويعرف المحدد $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ بالمحدد الثنائي ، و المحدد $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ بالمحدد الثلاثي وبالرجوع إلى مثال (٣ - ٤) فإن

(i) $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(ii) $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$
$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

وتجنباً لإجراء كل هذه الحسابات الدقيقة فإنه يمكن إيجاد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

وذلك نضرب عناصر القطر الرئيسي ثم نطرح منها حاصل ضرب عناصر القطر الآخر

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

أما بالنسبة للمحدد الثلاثي

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإننا نعيد كتابة العمودين الأول والثاني أقصى اليمين

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ونحسب المحدد بجمع حواصل ضرب العناصر في الأسهم المتجهة إلى اليمين مطروحاً منها حواصل ضرب العناصر في الأسهم المتجهة إلى اليسار .

مثال (٣ – ٥):

احسب قيمتي محددي المصفوفتين

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(i) $|A| = 2 \times 4 - 3 \times (-1) = 8 + 3 = 11$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{matrix}$

$$|A| = (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) - (3)(1)(3) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) = 6$$

للمحددات عدد من الخواص التي يمكن أن تساعدنا في إيجاد مفكوك المحددات وتبسيط العديد من هذه المحددات إلى درجة يسهل إيجاد قيم هذه المحددات وسوف نقوم في الجزء التالي باستعراض مثل هذه الخواص .

خواص المحددات:

١ - **لا تتغير قيمة المحدد إذا بدلنا صفوفه إلى أعمدة وأعمدته إلى صفوف .**

بمعنى أنه

إذا كـان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

فـإن

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}a_{21} = \Delta$$

٢ - **لا تتغير قيمة المحدد ولكن تتغير إشارته إذا بدلنا صفين (أو عمودين)**

نفـرض أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}\ a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta$$

(حيث إننا بدلنا صفين)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}\ a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\Delta$$

(حيث إننا بدلنا عمودين)

٣ - تنعدم قيمة المحدد إذا تشابه صفان (أو عمودان)

(تشابه صفان)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

(تشابه عمودان)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21} = 0$$

٤ - إذا احتوى أي صف (أو عمود) في المحدد على عامل مشترك فإن قيمة المحدد تساوي قيمة المحدد الناتج من إخراج العامل المشترك مضروباً في هذا العامل.

أي أنه

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,\Delta$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,a_{11}a_{22} - ka_{12}a_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,\Delta$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,\Delta$$

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\,a_{11}a_{22} - a_{12}\,ka_{21} = k(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = k\,\Delta$$

٥ - تنعدم قيمة المحدد إذا كان كل عنصر من عناصر أي صف (أو عمود) هو مضاعف للعنصر المناظر له من صف آخر (أو عمود آخر) .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ na_{11} & na_{12} \end{vmatrix} = a_{11}n\,a_{12} - a_{12}n\,a_{11} = n\,(a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) = n.0 = 0$$

أو بتطبيق الخاصيتين (٣) ، (٤)

$$= n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = n.0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & na_{11} \\ a_{21} & na_{21} \end{vmatrix} = a_{11}\, na_{21} - n\, a_{11}a_{21} = n\,(a_{11}a_{21} - a_{11}a_{21}) = n.0 = 0$$

أو بتطبيق الخاصيتين (٣) ، (٤)

$$= n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = n.0 = 0$$

٦ - **لا تتغير قيمة المحدد إذا أضفنا إلى أي صف (أو عمود) مضاعفات صفاً (أو عموداً) آخر .** (نعني بالإضافة إما إضافة موجب «الجمع» أو إضافة سالب «الطرح»)

إذا كان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

إذا أضفنا مضاعفات n من الصف الأول إلى الصف الثاني

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ na_{11} + a_{21} & na_{12} + a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,(na_{12} + a_{22}) - a_{12}\,(na_{11} + a_{21})$$

$$= na_{11}\, a_{12} + a_{11}\, a_{22} - na_{11}\, a_{12} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = \Delta$$

إذا أضفنا مضاعفات n من العمود الأول إلى العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} a_{11} & na_{11} + a_{12} \\ a_{21} & na_{21} + a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,(na_{21} + a_{22}) - a_{21}\,(na_{11} + a_{12})$$

$$= na_{11}\, a_{21} + a_{11}\, a_{22} - na_{11}a_{21} - a_{12}\, a_{21}$$

$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} = \Delta$$

٧ - **يمكن التعبير عن المحدد كمجموع محددين إذا كانت عناصر أي صف (أو عمود) تتكون من مجموع حدين .**

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k_1 & a_{12} + k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

الطرف الأيمـن = $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + (k_1 a_{22} - k_2 a_{21})$

= $(a_{11} + k_1)\ a_{22} \quad - (a_{12} + k_2)\ a_{21}$

الطرف الأيسر = $(a_{11} + k_1)\ a_{22} \quad - (a_{12} + k_2)\ a_{21}$

إذن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر .

وكما ذكرنا أن الفائدة الأساسية من هذه الخواص هو تبسيط العمليات الحسابية لإيجاد قيم المحددات كما هو موضح من الأمثلة التالية .

مثال (٣-٦):

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 64 & 19 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$

يلاحظ أن قيمة هذا المحدد بالطريقة المباشرة هي

$$\Delta = 64 \times 2 - 19 \times 7 = 128 - 133 = -5$$

ولكنه باستخدام الخاصية (٦) فإنه يمكننا تبسيط عناصر هذا المحدد وذلك بطرح تسعة أمثال عناصر الصف الثاني من عناصر الصف الأول $(R_1 \rightarrow -9\ R_2 + R_1)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 1 \times 7 = -5$$

مثال (٣-٧):

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 144 & 6 \\ 24 & 8 \end{vmatrix}$

قيمة هذا المحدد بالطريقة المباشرة

$$\Delta = 144 \times 8 - 6 \times 24 = 1152 - 144 = 1008$$

أما بتطبيق الخاصية (٤) (بأخذ 24 عامل مشترك من العمود الأول ثم 6 عامل مشترك من الصف الأول) نحصل على

$$\Delta = 24 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 \times 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 144\,(8 - 1) = 144 \times 7 = 1008$$

المفكوك باستخدام المتممات المميزة (المرافقات)

تعريـــف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ **فإن المحدد المتمم للعنصر** a_{ij} ويرمز له بالرمز A_{ij} هو **محدد المصفوفة الجزئية** التي تبقى بعد حذف الصف i والعمود j من المصفوفة A . ويرمز للعدد $(-1)^{i+j} A_{ij}$ بالرمز C_{ij} ويسمى **المتمم المميز (أو المرافق أو العامل)** للعنصر a_{ij} . ويلاحظ أن المتمم المميز والمتمم لعنصر ما a_{ij} يختلفان فقط في الإشارة . أي أن $C_{ij} = \pm A_{ij}$

وعليه فإننا نطبق ما يسمى بقاعدة الإشارات

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

المحدد الثلاثي:

من معلوماتنا السابقة أن المحدد الثلاثي يتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة أي أنه يحتوي على تسعة عناصر وقيمة هذا المحدد يمكن إيجادها من أي صف أو أي عمود أي أنه هناك ٦ طرق لإيجاد قيمة هذا المحدد .

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

على سبيل المثال قيمة المحدد باستخدام الصف الأول هي

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

أما إذا أردنا إيجاد المفكوك باستخدام عموده الأول

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

أي أنه مفكوك المحدد باستخدام صفه الأول هو عبارة عن حاصل جمع حواصل ضرب العناصر a_{11}, a_{12}, a_{13} في المحددات الثنائية

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$ على الترتيب

مع تطبيق قاعدة الإشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

فنلاحظ أن هذه المحددات على سبيل المثال المحدد الثاني $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

المضروب في العنصر a_{11} هو المحدد الثنائي الناتج من حذف الصف والعمود المشترك فيهم هذا العنصر وكذلك بالنسبة لباقي العناصر . ولذلك فإنه يمكن أن نقول إن لجميع عناصر المحدد الثلاثي وعددها تسعة عناصر لكل منهم له محدد ثنائي (متمم) ينشأ من حذف الصف والعمود المشترك منها هذا العنصر وأن قاعدة الإشارات للعناصر التسعة هي $(-1)^{i+j}$ حيث i ترمز لرقم الصف ، j ترمز إلى رقم العمود . وكما سبق فإن المحدد الثنائي(المتمم) مضروباً في $(-1)^{i+j}$ هو المتمم المميز (المرافق) للعنصر a_{ij} الذي يرمز له بالرمز C_{ij} . على سبيل المثال مرافق العنصر a_{13} هو

$$C_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

وكما ذكرنا أن المحدد الثلاثي يمكن أن نحصل على مفكوكة بست طرق مختلفة تعتمد على عدد الصفوف وعدد الأعمدة فإن

باستخدام الصفوف الثلاثة

$$\Delta = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13}$$
$$\Delta = a_{21} C_{21} + a_{22} C_{22} + a_{23} C_{23}$$
$$\Delta = a_{31} C_{31} + a_{32} C_{32} + a_{33} C33$$

أو

باستخدام الأعمدة الثلاثة

$$\Delta = a_{11} C_{11} + a_{21} C_{21} + a_{31} C_{31}$$
$$\Delta = a_{12} C_{12} + a_{22} C_{22} + a_{32} C_{32}$$
$$\Delta = a_{13} C_{13} + a_{23} C_{23} + a_{33} C_{33}$$

أو بصورة أعم أنه إذا كان لدينا المصفوفة A التي من النوع $n \times n$ فإن

لكل $1 \le i \le n$

(باستخدام الصف i)

$$|A| = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

لكل $1 \le j \le n$

(باستخدام العمود j)

$$|A| = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$

مثال (٣-٨):

أوجد مفكوك المحدد

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

باستخدام الصف الأول نحصل على

$$\Delta = 3 \text{ x } \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \text{ x } \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \text{ x } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (1-20) + (0-15) + 2\,(0-3) = 3 \text{ x} - 19 - 15 - 6 = -78$$

باستخدام العمود الأول نحصل على

$$\Delta = 3 \text{ x } \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \text{ x } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \text{ x } \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (1-20) + 3\,(-5-2) = 3 \text{ x} - 19 + 3 \text{ x} - 7 = -78$$

نلاحظ من هذا المثال أن فك المحدد من العمود الأول أبسط من الفك من الصف الأول وذلك لوجود صفر في العمود الأول ولذلك فإننا نحاول دائماً أن نفك المحدد من الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار ولذلك فإنه يمكننا الاستفادة من الخواص السالفة الذكر حتى يمكننا إيجاد أكبر عدد من الأصفار في أي صف أو أي عمود .

مثال (٣-٩):

أوجد قيمة المحدد
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

بطرح عناصر الصف الأول من عناصر الصف الثاني $(R_2 \to -R_1 + R_2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

بطرح عناصر الصف الأول من عناصر الصف الثالث $(R_3 \to -R_1 + R_3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

بفك المحدد من العمود الأول

$$\Delta = 1 \text{ x } \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = -6 - (-1) \text{ x } (-10) = -6 - 10 = -16$$

مثال (٣-١٠):

أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

بإضافة عناصر الصف الأول إلى عناصر الصف الثاني $(R_2 \rightarrow R_1 + R_2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

بإضافة عناصر الصف الأول إلى عناصر الصف الثالث $(R_3 \rightarrow R_1 + R_3)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

بفك هذا المحدد من العمود الأول

$$\Delta = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

يلاحظ من المثالين السابقين أنه أمكن اختزال المحددات الثلاثية بواسطة خواص المحددات إلى محددات ثنائية .

مثال (٣ـ ١١):

أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

بطرح ثلاثة أمثال عناصر الصف الأول من الصف الثاني ، بطرح ضعف عناصر الصف الأول من الصف الثالث ، بطرح ثلاثة أمثال عناصر الصف الأول من الصف الرابع

أي أن

$$R_2 \to -3R_1 + R_2$$

$$R_3 \to -2R_1 + R_3$$

$$R_4 \to -3R_1 + R_4$$

وبفك المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

من العمود الأول

$$\Delta = 1 \text{ x } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

بإضافة عناصر الصف الأول إلى عناصر الصف الثالث $(R_3 \rightarrow R_1 + R_3)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

بفك المحدد من العمود الأول

$$\Delta = -1 \text{ x} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -1 \ (9-27) = 18$$

نلاحظ من هذا المثال أنه باستخدام الخواص أمكن اختزال المحدد الرباعي إلى المحدد الثنائي .

نتيجة :

محدد المصفوفة المثلثية (العليا أو السفلى) يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

أي أنه إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{nn}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ \cdots \ \cdot a_{nn}$$

معكوس المصفوفة باستخدام المتممات المميزة (المرافقات)

تعريــف :

إذا كانت A أي مصفوفة من النوع $n \times n$ وكان C_{ij} هو المتمم المميز للعنصر a_{ij}

فإن المصفوفة

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى **بمصفوفة المتممات المميزة (المرافقات) من A**

مدور هذه المصفوفة يسمى بالمصفوفة المرتبطة (القابلة) بالمصفوفة A ويرمز لها بالرمز $adj\ A$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

كحالة خاصة للمصفوفة من النوع 2×2 فإن المصفوفة المرتبطة نحصل عليها بإبدال عناصر القطر الرئيسي وضرب عناصر القطر الآخر $\times (-1)$.

مثال (٣ ـ ١٢):

أوجد المصفوفة المرتبطة بالمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

مرافقات الصف الأول هي

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 \quad , \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17 \quad , \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

مرافقات الصف الثاني هي

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \quad , \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

مرافقات الصف الثالث هي

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad , \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \quad , \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

إذن

$$adj\, A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

نظرية (٣ ـ ١):

لأي مصفوفة مربعة $A = [a_{ij}]$ من النوع $n \times n$ فإن

$$A\,(adj\; A) = (adj\; A)\,A = |A|\, I_n$$

البرهان :

$$A\,(adj\, A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

العنصر $i, j\, th$ في مصفوفة حاصل الضرب $A\,(adj\; A)$ يكون

$$a_{i1} C_{j1} + a_{i2} C_{j2} + \ldots + a_{in} C_{jn} = \begin{cases} |A| \;, & i = j \\ 0 \;, & i \neq j \end{cases}$$

$$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|\, I_n \qquad (1)$$

وبنفس الطريقة العنصر $i, j\ th$ في مصفوفة حاصل الضرب $(adj\ A)\ A$ يكون

$$C_{1i}\,a_{1j} + C_{2i}\,a_{2j} + \dots + C_{ni}\,a_{nj} = \begin{cases} |A|\ , & i = j \\ 0\ , & i \neq j \end{cases}$$

$$(adj\ A)\ A = |A|\, I_n \qquad (2)$$

من (2) ,(1) نجد أن $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\ A = |A|\, I_n$

مثال (٣-١٣) :

من مثال (٣ - ١٢) نجد أن

$$A.\,adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix} = -94 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونتيجة للنظرية السابقة فإنه يمكن إيجا معكوس المصفو ، بطريقة أخرى

نتيجة:

إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ وكان $|A| \neq 0$ فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ .\ adj\ A = \begin{bmatrix} \frac{C_{11}}{|A|} & \frac{C_{21}}{|A|} & \dots & \frac{C_{n1}}{|A|} \\ \frac{C_{12}}{|A|} & \frac{C_{22}}{|A|} & \dots & \frac{C_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{C_{1n}}{|A|} & \frac{C_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{C_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

البرهان:

باستخدام النظرية السابقة

$$A\,(adj\ A) = |A|\ I_n$$

حيث $|A| \neq 0$

$$A\,\frac{1}{|A|}\,(adj\ A) = \frac{1}{|A|}\,(A\ adj\ A)$$

$$A\,\frac{1}{|A|}\,(adj\ A) = \frac{1}{|A|}\,(|A|I_n) = I_n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \ adj\ A$$

تعريف:

تعرف المصفوفة بأنها قابلة للانعكاس (غير شاذة أو غير منعزلة) إذا كان محدد هذه المصفوفة لا يساوي الصفر .

مثال (٣ - ١٤):

أوجد معكوس المصفوفة المعرفة في مثال (٣ - ١٢)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\ adj\ \ A = \frac{1}{-94}\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ \frac{-17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & \frac{-28}{94} \end{bmatrix}$$

مثال (٣ـ١٥):

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$|A| = -24 \neq 0$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

إذن $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A = \frac{1}{-24}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

مثال (٣ـ١٦):

أوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$|A| = -27 \neq 0$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

إذن $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A = \frac{1}{-27}\begin{bmatrix} -13 & -4 & 1 \\ 11 & -7 & -5 \\ -10 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

قاعدة كرامر لحل مجموعة من المعادلات الخطية

نظرية (٣ ـ ٢) (قاعدة كرامر)

نفرض لدينا مجموعة المعادلات الخطية n في عدد n من المجاهيل على الصورة

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

باستخدام المصفوفات يمكن كتابة مجموعة المعادلات على الصورة

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

وبصورة مختصرة $AX = B$

فإذا كان $|A| \neq 0$ فيكون لهذا النظام حل وحيد هذا الحل هو

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots \quad , \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

حيث A_i هي المصفوفة الناتجة بإحلال عناصر العمود i بعناصر المصفوفة B .

البرهان:

بما أن $|A| \neq 0$ فإن المصفوفة A قابلة للانعكاس (أي لها معكوس A^{-1}) من معلوماتنا السابقة

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\, adj\, A\, B = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} C_{11}\, b_1 + C_{21}\, b_2 + \cdots + C_{n1}\, b_n \\ C_{12}\, b_1 + C_{22}\, b_2 + \cdots + C_{n2}\, b_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_{1n}\, b_1 + C_{2n}\, b_2 + \cdots + C_{nn}\, b_n \end{bmatrix}$$

إذن $\quad x_i = \frac{C_{1i}}{|A|} b_1 + \frac{C_{2i}}{|A|} b_2 + \ldots + \frac{C_{ni}}{|A|} b_n \qquad 1 \le i \le n \quad (1)$

نفرض

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث A_i تختلف عن A فقط في العمود i فتكون المتممات المميزة للعناصر $b_1, b_2, \ldots, b_n$ في المصفوفة A_i هي نفس المتممات المميزة للعناصر المناظرة في العمود i للمصفوفة A . لذلك يكون مفكوك المحدد $|A_i|$ من العمود i على الصورة

$$|A_i| = c_{1i}\, b_1 + c_{2i}\, b_2 + \ldots + c_{ni}\, b_n$$

بالتعويض في (1)

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad 1 \le i \le n.$$

وباستخدام هذه القاعدة يمكن إيجاد مجموعة حل مجموعة من المعادلات الخطية باستخدام المحددات . مع ملاحظة أنه لحل نظام من n من المعادلات في n من المجاهيل أن نحسب قيم $n+1$ من المحددات لمصفوفات $n \times n$.

مثال (٣-١٧):

استخدم قاعدة كرامر لحل مجموعة المعادلات

$$2x + 3y = 8$$
$$6x - 4y = -2$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 18 = -26 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -32 + 6 = -26$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 48 = -52$$

إذن $y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-52}{-26} = 2$ ، $x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-26}{-26} = 1$

مثال (٣-١٨):

حل مجموعة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

$$3x_1 - 2x_2 \qquad = -3$$
$$x_1 \qquad + 3x_3 = -5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -9$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \\ -9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & -9 & 1 \end{vmatrix} = 51$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & -9 \end{vmatrix} = -34$$

إذن $x_1 = \frac{17}{17} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{51}{17} = 3 \quad , \quad x_3 = \frac{-34}{17} = -2.$

مثال (٣-١٩):

حل مجموعة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16$$

$x_1 = \frac{-4}{2} = -2 \quad , \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1 \quad , \quad x_3 = \frac{-16}{2} = -8$

مثال (٣ ـ ٢٠):

حل مجموعة المعادلات باستخدام قاعدة كرامر

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\ + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

$$x_1 = \frac{-40}{44} \quad , \qquad x_2 = \frac{72}{44} \quad , \qquad x_3 = \frac{152}{44}$$

نتائج هامة :

١ - إذا كانت كانت كل من A, B مصفوفتين من النوع $n \times n$

فإن $|AB| = |A|\,|B|$

٢ - إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للانعكاس $(|A| \neq 0)$

فإن (i) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

(ii) $|adj\ A| \neq 0$

(iii) $|adj\ A| = |A|^{n-1}$

(iv) $(adj\ A)^{-1} = \dfrac{A}{|A|} = adj\ A^{-1}$

٣ - إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$

فإن $|kA| = k^n |A|$ حيث k أي عدد قياسي .

تمـــاريـن (٣)

١ - أوجد العـدد الكلي للانعكاسات في كل من التبـديلات التـالية للمجموعة $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(i) (1, 3, 5, 4, 2) (ii) (4, 2, 5, 3, 1) (iii) (1, 2, 3, 4, 5)

(iv) (2, 3, 5, 4, 1) (v) (5, 4, 3, 2, 1) (vi) (3, 4, 1, 5, 2)

٢ - صنف كل من التبديلات السابقة أي منها زوجية أو فردية .

٣ - صنف كل من التبديلات التالية على المجموعة $S = \{1, 2, 3, 4\}$

(i) (1, 2, 4, 3) (ii) (4, 2, 1, 3) (iii) (1, 2, 3, 4)

(iv) (1, 4, 2, 3) (v) (3, 2, 1, 4) (vi) (2, 4, 3, 1)

٤ - احسب قيمة المحددات التالية مستخدماً العلاقة

$$|A| = \Sigma\ (\pm)\ a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (v) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

٥ - إذا كان

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4$$

احسب قيم المحددات التالية باستخدام خواص المحددات

$$B = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + 4\,c_1 & b_2 + 4\,c_2 & b_3 + 4\,c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

٦ - إذا كان

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$$

أوجد قيم المحددات التالية باستخدام خواص المحددات

$$B = \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 - 3\,c_1 & a_2 + 2b_2 - 3\,c_2 & a_3 + 2b_3 - 3\,c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_1 & 3c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

٧ - أوجد قيم المحددات التالية

(i) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

(vi) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

٨ - أثبت أن $|AB| = |A|\,|B|$ لكل من

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

٩ - احسب جميع المرافقات (المتممات المميزة) لكل من :

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

١٠- افرض المصفوفات التالية

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

احسب كلاً من

(i) $adj\ A$

(ii) $|A|$

(iii) أثبت أن $A\,(adj\ A) = |A|\,I_3$

١١ - احسب معكوس المصفوفات التالية ـ إن وجد ـ باستخدام المرافقات :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

١٢- باستخدام خواص المحددات أوجد مفكوك كل من المحددات التالية

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & a+b & c \\ 1 & b+c & a \\ 1 & a+c & b \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ (v) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

١٣- أوجد قيمة a التي تجعل قيمة كل من المحددات التالية يساوي صفراً

(i) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+1 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 2a-3 & 12 & 25 \\ 4a+1 & 7 & 14 \\ 7-3a & 2 & 5 \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} a+6 & 12 & 7 \\ 2a-7 & 20 & 18 \\ 8-4a & 16 & 15 \end{vmatrix}$

١٤ - إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ حيث $|A| = -3$ فاحسب قيم المحددات التالية

(i) $|3A|$ (ii) $|3A^{-1}|$ (iii) $|(3A)^{-1}|$

(iv) $|A^2|$ (v) $|A^4|$ (vi) $|adj\ A|$

١٥ - إذا كانت كل من A , B مصفوفتين من النوع $n \times n$

حيث $|B| = -4$, $|A| = 5$ احسب قيم المحددات التالية :

(i) $|A^{-1} B^{T}|$ (ii) $|B^{-1} A|$

١٦ - أوجد جميع قيم a التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 3 \\ 5 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ منعزلة .

١٧ - استخدم قاعدة كرامر إذا كان يمكن تطبيقها لحل مجموعة المعادلات التالية :

(i) $x - y = 7$, $3x + 2y = 4$

(ii) $3x + 4y = 7$, $3x - 2y = 5$

(iii) $x - 5y + 3z = 3$, $x + y - z = 1$, $2x + y + z = 7$

(iv) $2x + 4y + 6z = 2$, $x + 2z = 0$, $2x + 3y - z = 5$

(v) $2x + y + z = 6$, $3x + 2y - 2z = -2$, $x + y + 2z = 4$

(vi) $x + y - 2z = 1$, $2x - y + z = 2$, $x - 2y - 4z = -4$

١٨ - أوجد حل المعادلات المذكورة في تمرين (١٧) باستخدام معكوس المصفوفة ـ إن وجد ـ باستخدام المرافقات .

الباب الرابع

المتجهات في الفضاءات $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$

THE VECTORS IN $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ SPACES

الباب الرابع

المتجهات في الفضاءات $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

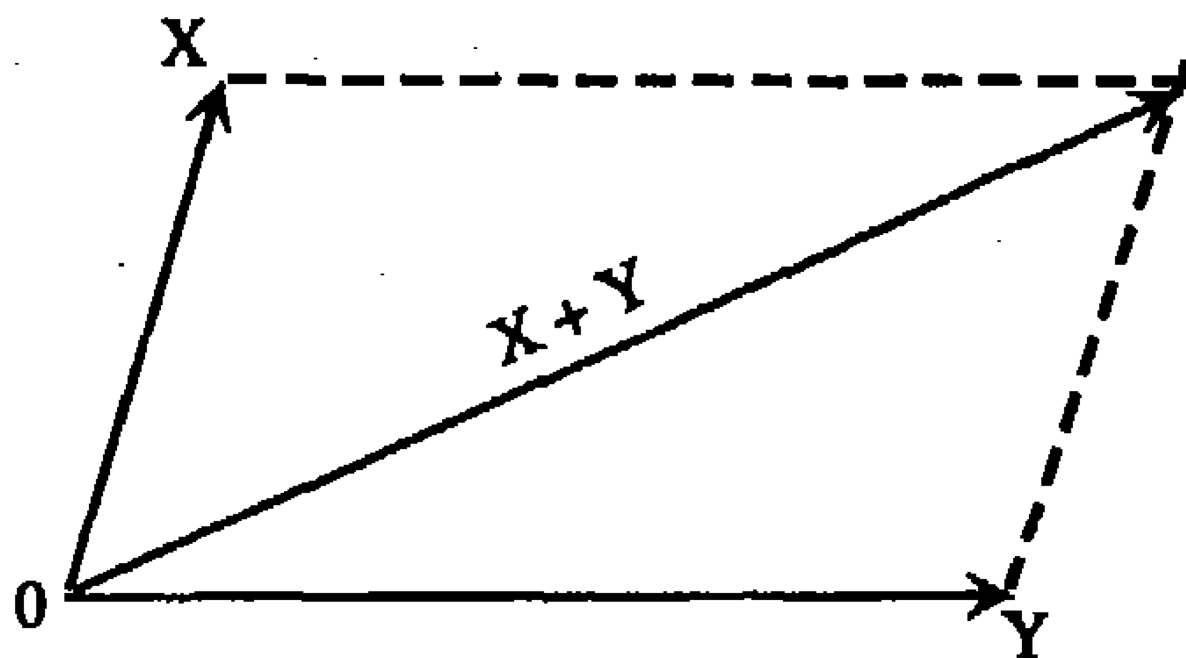
The Vectors in $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ Spaces

تقسم الكميات التي تنشأ في العديد من التطبيقات الفيزيائية إلى نوعين ، النوع الأول هو الذي يمكن تحديده تحديداً تاماً بقيمة مقداره فقط وتسمى مثل هذه الكميات **بالكميات القياسية** مثل درجة الحرارة والمساحة والطول والسرعة القياسية . أما النوع الثاني فيجب معرفة كل من مقداره واتجاهه حتى يمكن تحديده تحديداً تاماً مثل العزوم والازدواج والقوة والإزاحة والسرعة المتجهة وتسمى مثل هذه الكميات **بالكميات المتجهة** والتي يمكن تمثيلها **بالمتجهات** التي يرمز لها بأسهم لها أطوال واتجاهات مناسبة ويسمى ذيل السهم بنقطة البداية ورأس السهم بنقطة النهاية للمتجه .

وإذا رمزنا لمجموعة الأعداد الحقيقية بالرمز $\mathbb{R}$ فنعني أن اهتمام دراستنا في بداية هذا الباب منصب على فضاء $\mathbb{R}^n$ أي على مجموعة الأعداد الحقيقية .

سوف نستعرض في بداية هذا الباب بعض العمليات التالية

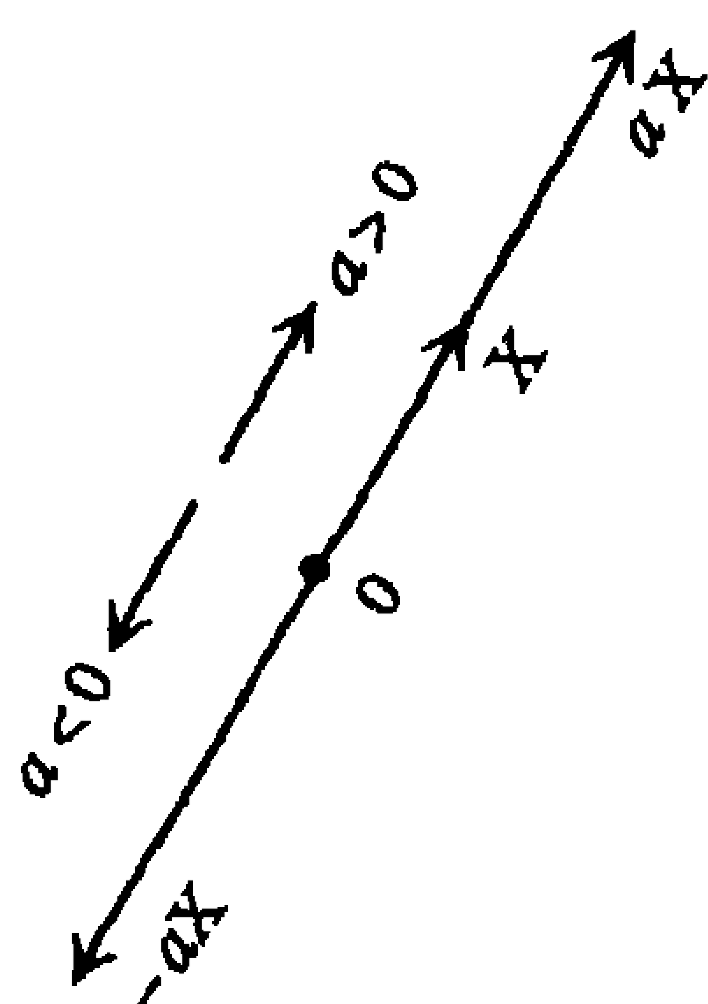
١ ـ جمع متجهين



لنفرض لدينا المتجهين X , Y فإن مجموعهم (المحصلة) هو المتجه X + Y الذي يمكن الحصول عليه باستخدام

قانون متوازي الأضلاع ويمثل بقطر المتوازي الذين فيه X , Y ضلعان متجاوران .

٢ ـ ضرب متجه بعدد حقيقي

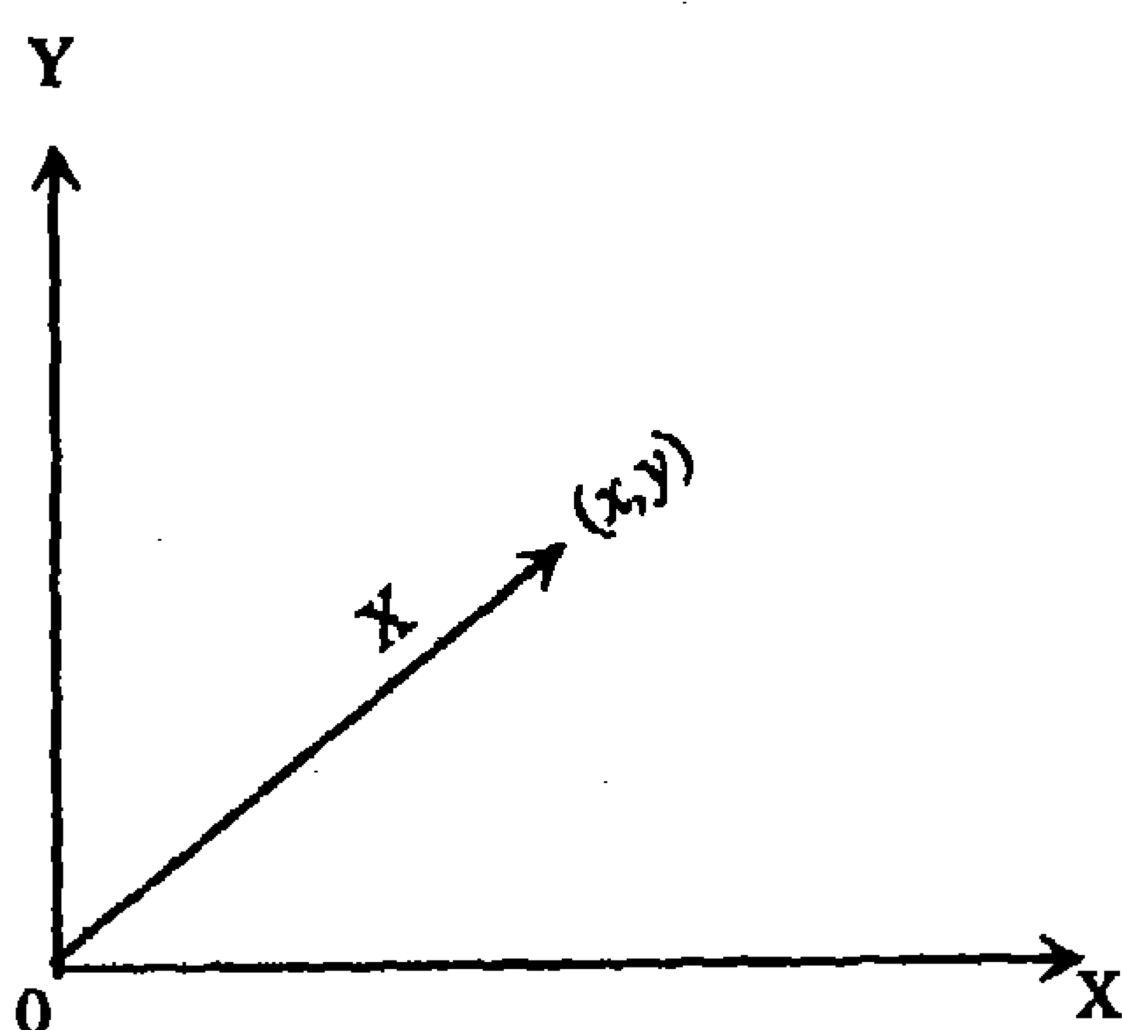


حاصل ضرب المتجه X بالعدد الحقيقي a هو المتجه $a\,X$ الذي طوله يساوي مضاعفات طول المتجه X عدد a من المرات واتجاهه يحدد تبعاً لقيمة a .

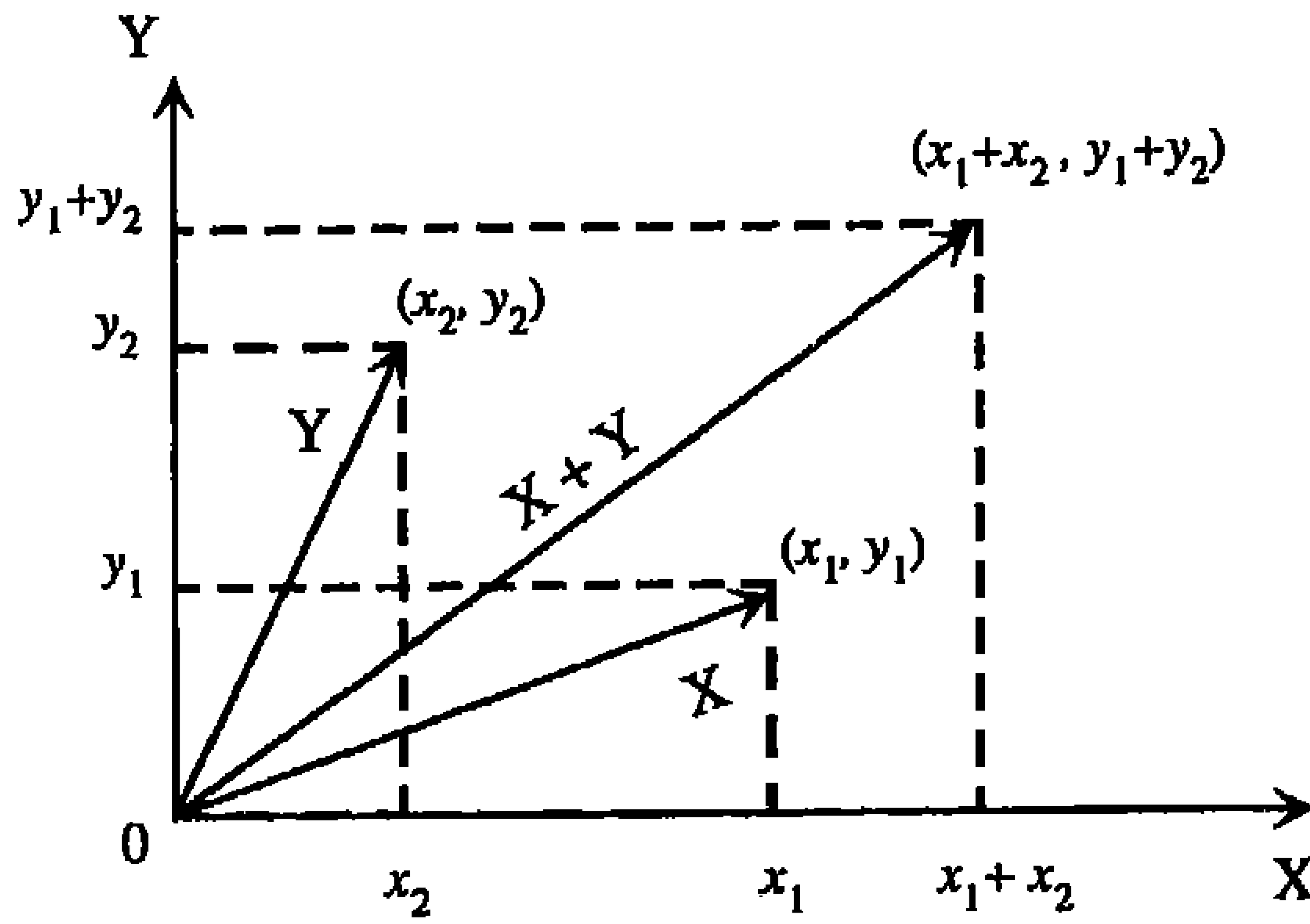
فيكون في اتجاه X إذا كانت قيمة $a > 0$ وفي عكس الاتجاه إذا كانت قيمة $a < 0$ وعندما قيمة $a = 0$ فإنه يؤول إلى ما يسمى بالمتجه الصفري الذي طوله صفر (أي ليس له طول) وليس له اتجاه .

ويسمى ضرب متجه بعدد حقيقي بالضرب القياسي لمتجه بعدد حقيقي

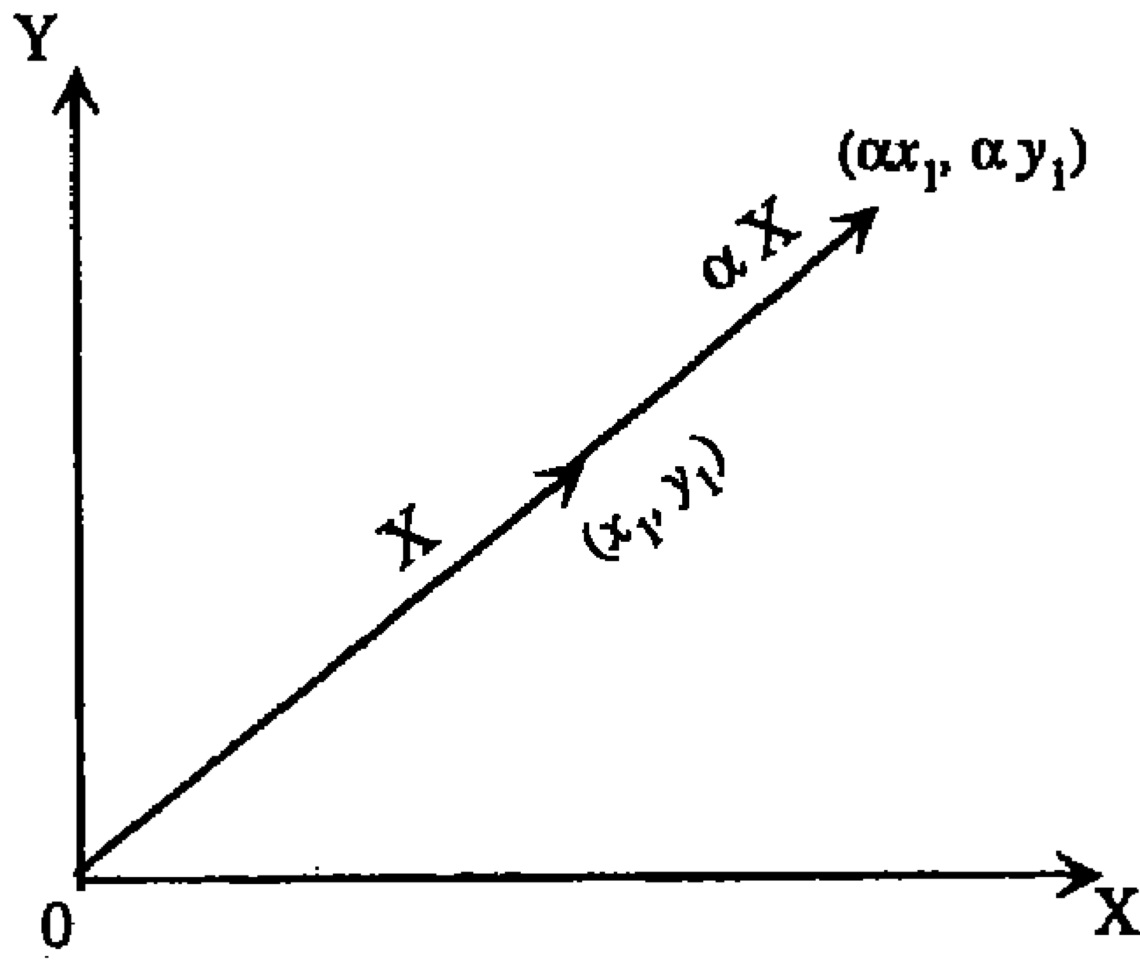
وباستخدام طريقة تمثيل النقط في المستوى الديكارتي $\mathbb{R}^2$ بواسطة الأزواج المرتبة فإذا اتخذنا من نقطة الأصل 0 المعرفة كما سبق ورسمنا محاور الإحداثيات الديكارتية 0X , 0Y فإن أي متجه يمكن تحديده باستخدام إحداثيات نهاية هذا المتجه وتسمى x بالمركبة الأولى ، y بالمركبة الثانية للمتجه X ويرمز له بالرمز $X = (x, y)$



وعلى ذلك إذا كانت نهايتا المتجهين X , Y هما على (x_1, y_1) , (x_2, y_2) الترتيب فإن النقطة التي إحداثاها $(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ هي إحداثي نهاية المتجه X+Y



والنقطة التي إحداثاها $(\alpha x_1, \alpha y_1)$ هي إحداثي نهاية المتجه αX الناتج من ضرب المتجه X بالعدد الحقيقي α .



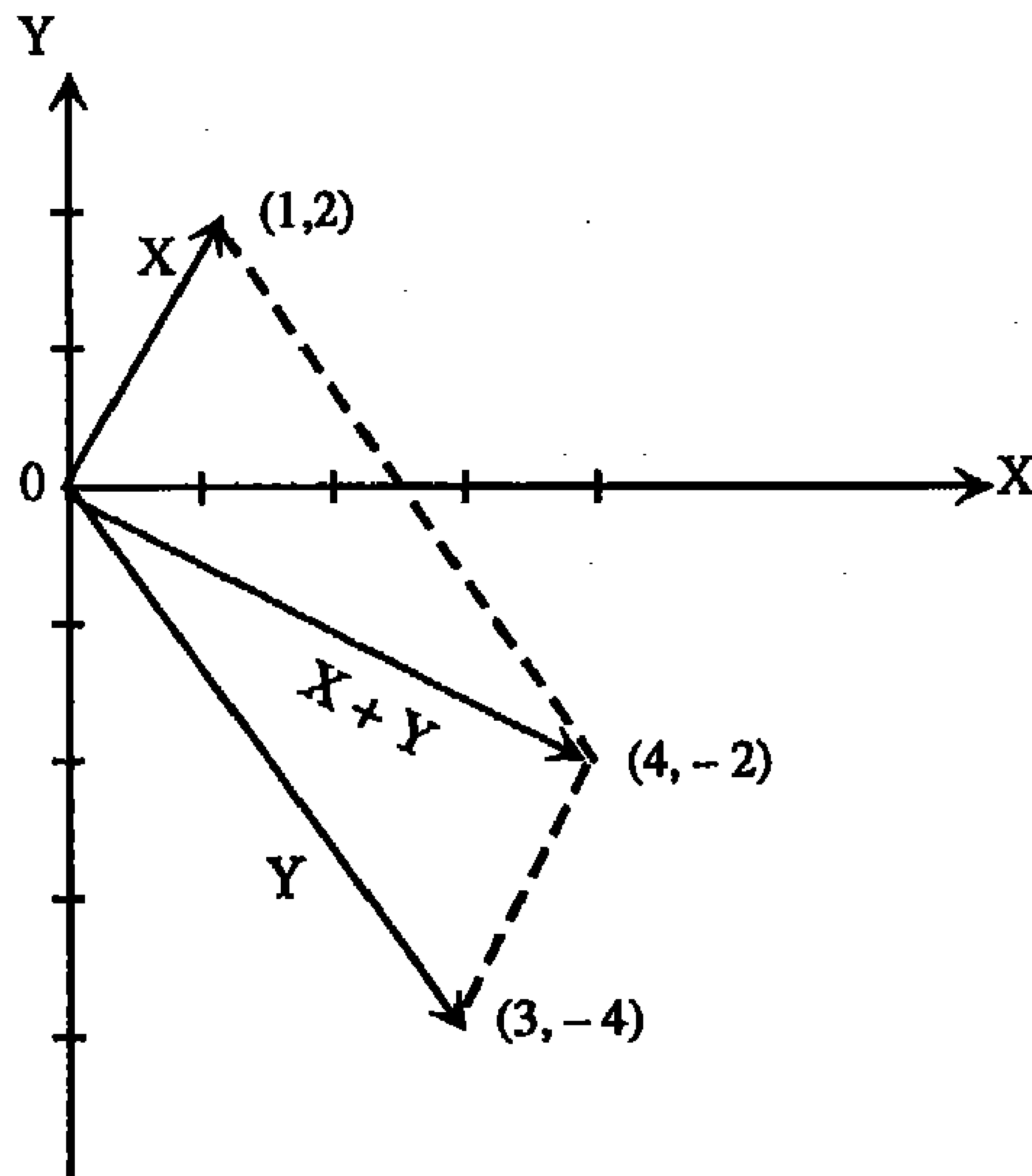
أي أن الضرب القياسي لمتجه بعدد حقيقي يعني ضرب جميع مركبات المتجه بالعدد الحقيقي .

مثال (٤ ـ ١):

نفرض لدينا المتجهين

$Y = (3, -4)$ ، $X = (1, 2)$ فإن

$$X + Y = (1, 2) + (3, -4)$$
$$= (1 + 3, 2 + (-4))$$
$$= (4, -2)$$



مثال (٤ ـ ٢):

إذا كانت $a = 2, b = -3$

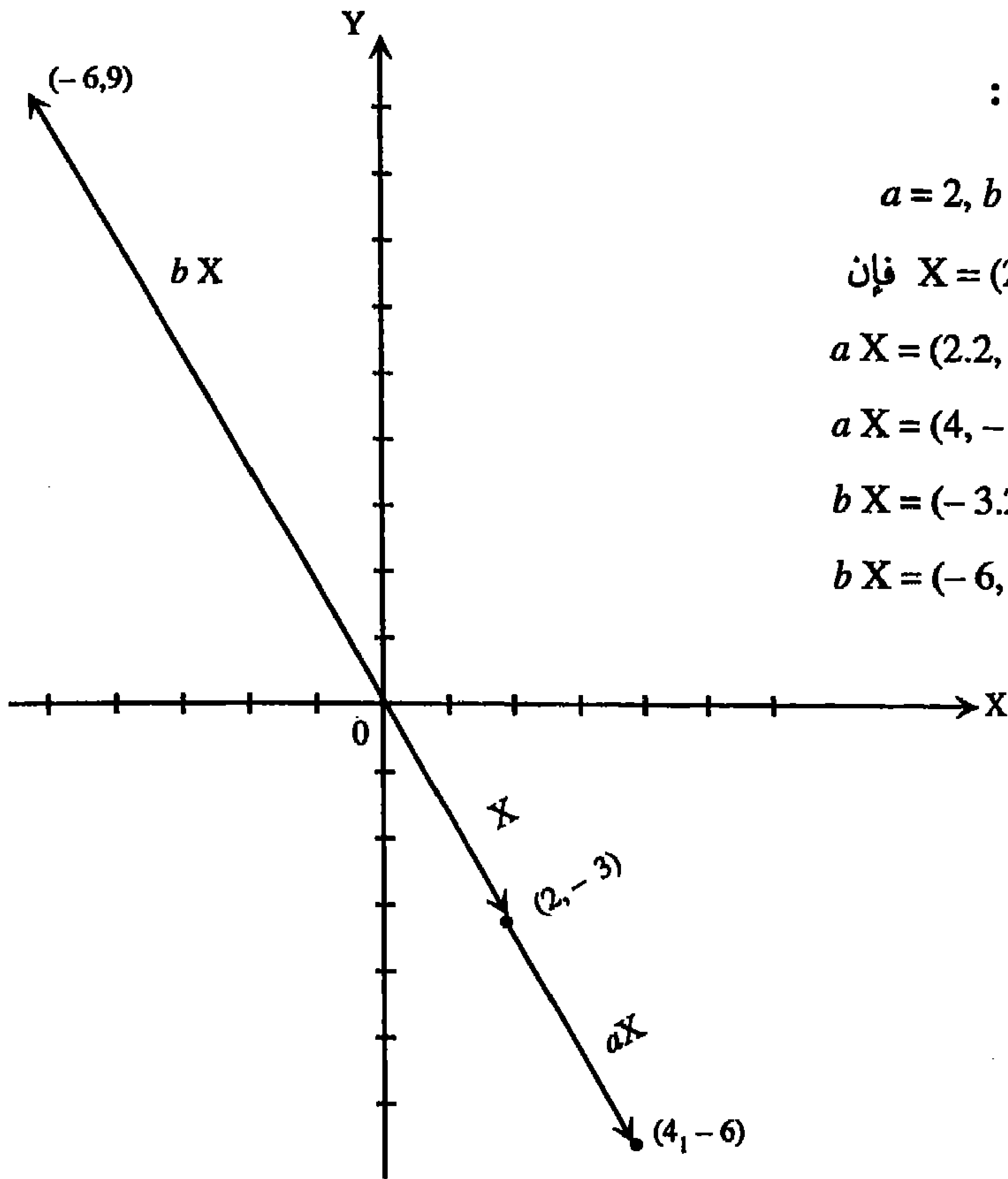
والمتجه $X = (2, -3)$ فإن

$a\,X = (2.2, 2.-3)$

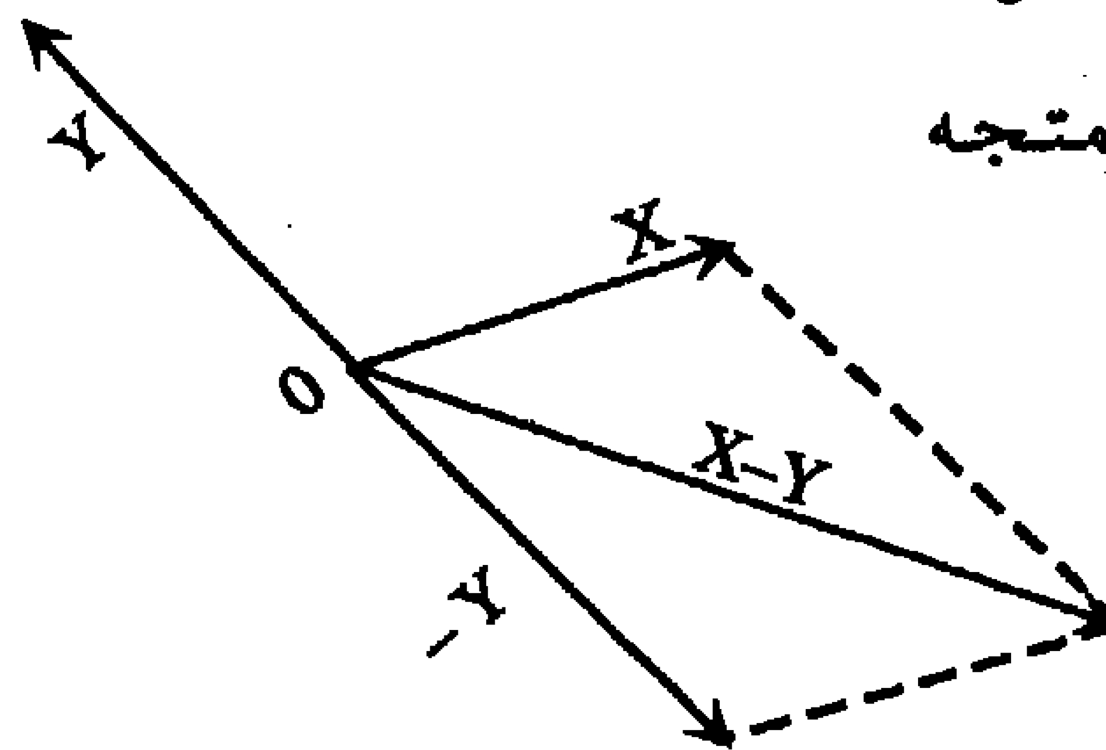
$a\,X = (4, -6)$

$b\,X = (-3.2, -3.-3)$

$b\,X = (-6, 9)$



كما يمكننا الرمز لحاصل الضرب $(-1)\;X$ بالرمز $-X$ ويسمى بسالب X وعلى ذلك إذا كان لدينا المتجهان X,Y فإن **الفرق بين X,Y** ويرمز له $X - Y$ ويعرف بأنه $X + (-Y)$ ويمكن تمثيل هذا المتجه كما بالشكل .



نلاحظ مما سبق أن التطابق بين المتجه ونهايته يسمى الزوج المرتب (x, y) من مجموعة الأعداد الحقيقية متجهاً في الفضاء $\mathbb{R}^2$ وعليه فإنه يمكن التعميم ونسمي n من الأعداد الحقيقية $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **متجهاً في الفضاء** $\mathbb{R}^n$ والذي يحقق العمليات السابقة .

فإذا كان لدينا المتجهان $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ، $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ فإن

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha X = (\alpha\ x_1, \alpha\ x_2, \dots, \alpha\ x_n) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

ومن الملاحظ أن كلاً من αX ، $X + Y$ متجهات في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

فعلى سبيل المثال إذا كانت $n = 2$ فإننا نحصل على ما يسمى **بالفضاء الثنائي** $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وعليه فإن أي زوج مرتب من الأعداد الحقيقية (x_1 , x_2) يكون متجهاً في $\mathbb{R}^2$ وإذا كانت $n = 3$ فإننا نحصل على ما يسمى **بالفضاء الثلاثي** $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ وعليه فإن أي ثلاثة أعداد حقيقية مرتبة (x_1, x_2, x_3) تكون متجهاً في الفضاء $\mathbb{R}^3$. تسمى n **بالبعد الفضائي** الذي سوف نتعرض له في الأبواب التالية .

يمكن تلخيص العمليات السابقة أنه لجمع متجهين يجب أن يكونا من نفس الفضاء (أي لهم نفس عدد المركبات) ويتم الجمع عن طريق جمع المركبات المتناظرة في كل منهما والمتجه الناتج من الجمع ينتمي إلى نفس الفضاء . وضرب متجه بعدد حقيقي يعني ضرب جميع مركبات المتجه بالعدد والمتجه الناتج ينتمي إلى نفس الفضاء .

مثال (٤ ـ ٣):

إذا كان لدينا المتجهان $Y = (2, 3, 5, 1)$, $X = (2, -1, 4, 3)$

فإن

$$\begin{aligned} X + Y &= (2, -1, 4, 3) + (2, 3, 5, 1) \\ &= (2 + 2, -1 + 3, 4 + 5, 3 + 1) \\ &= (4, 2, 9, 4) \end{aligned}$$

$$4X = (4.2, 4. -1, 4.4, 4.3) = (8, -4, 16, 12)$$

$$\begin{aligned} X - 2Y &= X + (-2Y) \\ &= (2, -1, 4, 3) + (-2.2, -2.3, -2.5, -2.1) \\ &= (2, -1, 4, 3) + (-4, -6, -10, -2) \\ &= (2 - 4, -1 - 6, 4 - 10, 3 - 2) \\ &= (-2, -7, -6, 1) \end{aligned}$$

تعريــف :

يتساوى المتجهان X , Y إذا تحققت الشروط التالية :

١ - أن ينتميا إلى نفس الفضاء (أي لهم نفس العدد من المركبات) .

٢ - تتساوى جميع المركبات المتناظرة في كل منهما .

مثال (٤ ـ ٤):

أوجد قيم x, y, z إذا كان

$$(2, -3, 4) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0)$$

باستخدام الضرب القياسي نحصل على

$$(2, -3, 4) = (x, x, x) + (y, y, 0) + (z, 0, 0)$$

باستخدام جمع المتجهات نحصل على

$$(2, -3, 4) = (x + y + z, x + y, x)$$

باستخدام شرط التساوي لمتجهين نحصل على

$$x+y+z = 2$$
$$x+y = -3$$
$$x = 4$$

بحل المعادلات الثلاثة نحصل على

$$x = 4 \quad , \quad y = -7 \quad , \quad z = 5.$$

تعريــــف :

يعرف المتجه الذي جميع مركباته أصفار **بالمتجه الصفري**

أي أن $\underbrace{(0, 0, \ldots, 0)}_{n \text{ - من المركبات}}$ هو المتجه الصفري في $\mathbb{R}^n$ ويرمز له بالرمز 0 .

ومن خواصه

$$X + 0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0)$$
$$= (x_1 + 0, x_2 + 0, \ldots, x_n + 0)$$
$$= (x_1, x_2, \ldots, x_n) = X = 0 + X.$$

نظرية (٤ ـ ١):

لأي ثلاث متجهات X, Y, Z في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(i) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$

(ii) $X + Y = Y + X$

(iii) $X + 0 = 0 + X = X$

(iv) $X + (-X) = (-X) + X = 0$

(v) $\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y$

(vi) $(\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X$

(vii) $(\alpha \beta) X = \alpha (\beta X)$

(viii) $1. X = X$

البرهان :

نفرض أن

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)\ ,\ Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)\ ,\ Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

(i) $$\begin{aligned} X + (Y + Z) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + \big((y_1, y_2, \dots, y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n)\big) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (X + Y) + Z \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} X + Y &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n) \\ &= Y + X. \end{aligned}$$

(iii) $$\begin{aligned} X + 0 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (0, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1 + 0, x_2 + 0, \dots, x_n + 0) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = X \\ 0 + X &= (0, 0, \dots, 0) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (0 + x_1, 0 + x_2, \dots, 0 + x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = X \\ X + 0 &= 0 + X = X \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} X + (-X) &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \\ &= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \dots, x_n - x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) = 0 \\ (-X) + X &= (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) + (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2, \dots, -x_n + x_n) \\ &= (0, 0, \dots, 0) = 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\text{(v)} \quad \alpha(X+Y) &= \alpha(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) \\
&= (\alpha(x_1+y_1), \alpha(x_2+y_2), \dots, \alpha(x_n+y_n)) \\
&= (\alpha x_1+\alpha y_1, \alpha x_2+\alpha y_2, \dots, \alpha x_n+\alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \dots, \alpha y_n) \\
&= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&= \alpha X + \alpha Y.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad (\alpha+\beta)X &= (\alpha+\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) = ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \dots, (\alpha+\beta)x_n) \\
&= (\alpha x_1+\beta x_1, \alpha x_2+\beta x_2, \dots, \alpha x_n+\beta x_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) \\
&= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \alpha X + \beta X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(vii)} \quad (\alpha\beta)X &= (\alpha\beta)(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \dots, \alpha\beta x_n) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n) \\
&= \alpha(\beta X)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(viii)} \quad 1.X &= 1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1.x_1, 1.x_2, \dots, 1.x_n) \\
&= (x_1, x_2, \dots, x_n) = X
\end{aligned}
$$

تعريف :

إذا كان $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $X = (x_1, x_n, \dots, x_n)$ أي متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^n$ فإن حاصل الضرب القياسي (الضرب الداخلي) للمتجهين X, Y يعرف بأنه المقدار القياسي الناتج من حاصل جمع حواصل ضرب المركبات المتناظرة في كل منهما ويرمز له بالرمز X . Y أي أن

$$X . Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n .$$

مثال (٤ ـ ٥) :

إذا كان $X = (7, 1, -3, 6)$, $Y = (3, -2, 1, 4)$ متجهين في $\mathbb{R}^4$

فإن
$$X \cdot Y = 7 \times 3 + 1 \times (-2) + (-3) \times 1 + 6 \times 4$$
$$= 21 - 2 - 3 + 24 = 40$$

مثال (٤ ـ ٦) :

إذا كان $X = (5, -4, 7, 0)$, $Y = (-1, 3, 5, 7)$ متجهين في $\mathbb{R}^4$

فإن
$$X \cdot Y = 5 \times (-1) + (-4) \times 3 + 7 \times 5 + 0 \times 7$$
$$= -5 - 12 + 35 + 0 = 18$$

تعريـــف :

يعرف الفضاء $\mathbb{R}^n$ المعرف عليه جمع المتجهات وضرب المتجهات بعدد حقيقي والضرب القياسي للمتجهات **بالفضاء الأقليدي ذو n من المركبات (الفضاء الأقليدي النوني)** .

نظرية (٤ ـ ٢) :

لأي ثلاثة متجهات X, Y, Z في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ ، فإن

(i) $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$

(ii) $(\alpha X) \cdot Y = \alpha (X \cdot Y)$

(iii) $X \cdot Y = Y \cdot X$

(iv) $X \cdot X \geq 0$,

$X \cdot X = 0$ إذا ـ وفقط إذا ـ كان $X = 0$

البرهان:

نفرض أن

$$X = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$
$$Y = (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$$
$$Z = (z_1 , z_2 , \dots , z_n)$$

$$\text{(i)} \quad X + Y = (x_1, x_2 , \dots , x_n) + (y_1, y_2 , \dots , y_n)$$
$$= (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \dots , x_n + y_n)$$
$$(X + Y).Z = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , \dots , x_n + y_n). (z_1 , z_2 , \dots , z_n)$$
$$= (x_1 + y_1). z_1 + (x_2 + y_2). z_2 + \dots + (x_n + y_n). z_n$$
$$= x_1.z_1 + y_1. z_1 + x_2. z_2 + y_2. z_2 + \dots + x_n . z_n + y_n . z_n$$
$$= (x_1.z_1 + x_2. z_2 + \dots + x_n. z_n) + (y_1. z_1 + y_2. z_2 + \dots + y_n.z_n)$$
$$= X . Z + Y . Z.$$

$$\text{(ii)} \quad \alpha X = \alpha (x_1 , x_2 , \dots , x_n) = (\alpha x_1 , \alpha x_2 , \dots , \alpha x_n)$$
$$(\alpha X) . Y = (\alpha x_1 , \alpha x_2 , \dots , \alpha x_n) . (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$$
$$= \alpha x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2 + \dots + \alpha x_n y_n$$
$$= \alpha (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$
$$= \alpha (X . Y)$$

$$\text{(iii)} \quad X . Y = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) . (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

وحيث أن مجموعة الأعداد الحقيقية تحقق قانون الإبدال للضرب

$$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n$$
$$= Y . X$$

$$\text{(iv)}\quad X \cdot X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

وحيث إن $1 \le i \le n$ ، x_i هو عدد حقيقي فإن $x_i^2 \ge 0$ وعليه فإن مجموع المربعات أكبر من الصفر ويساوي الصفر إذا كانت جميع قيم x_i تساوي الصفر . أي أن المتجه X هو المتجه الصفري .

تعريـــف:

بفـرض المـتـجـه $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ في الفـضـاء $\mathbb{R}^n$ فـإن معيار (أو طول) المتجه X والذي يرمز له بالرمز $\| X \|$ يعرف بأنه الجذر التربيعي الموجب لحاصل الضرب القياسي X.X . أي أن

$$\| X \| = \sqrt{X.X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

وحيث إن $X \cdot X \ge 0$ (من نظرية «٤ ـ ٢») إذن الجذر التربيعي موجود .

ولأي متجه آخر $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ في $\mathbb{R}^n$ فإن المسافة بين المتجهين X, Y والتي يرمز لها بالرمز $d(X, Y)$ يمكن الحصول عليها باستخدام العلاقة

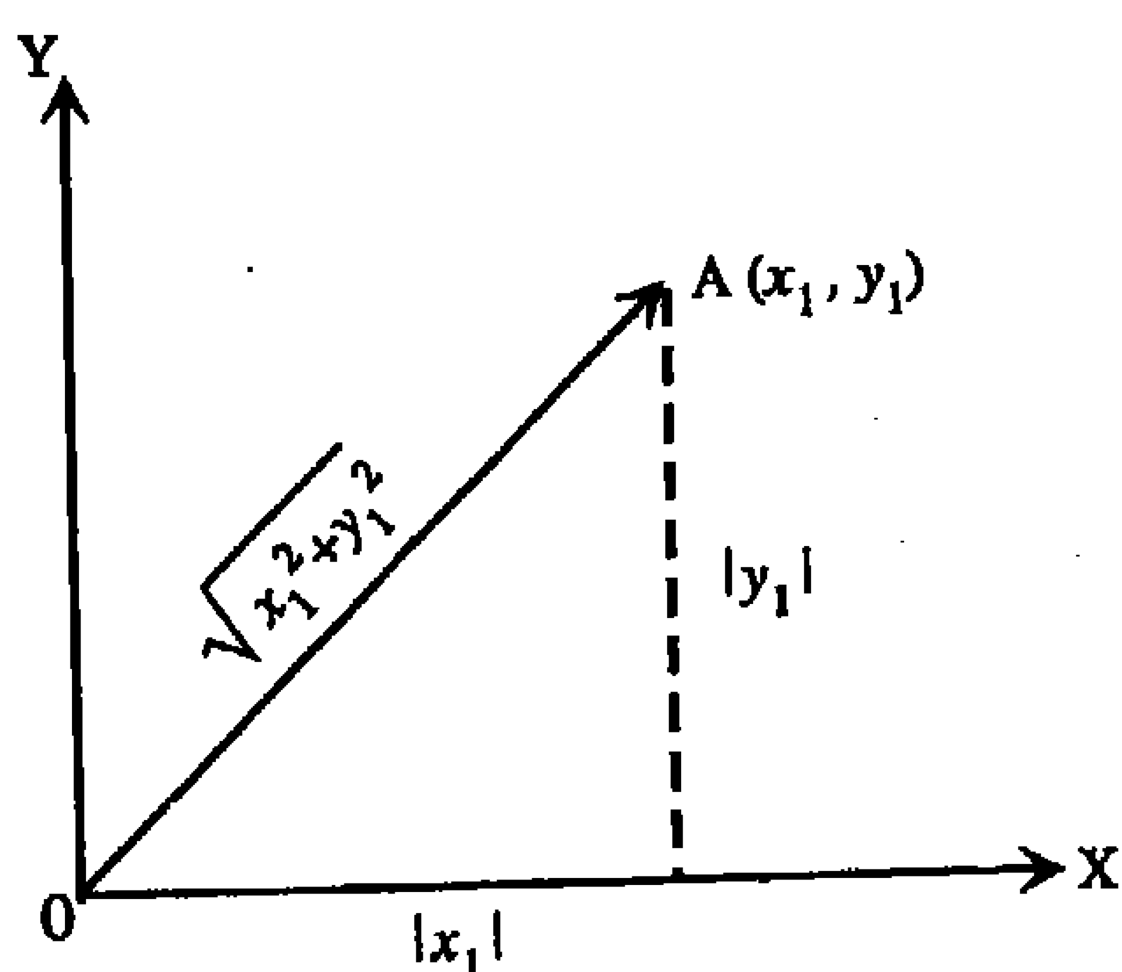
$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

يلاحظ أنه
$$d(X, Y) = \| X - Y \|$$

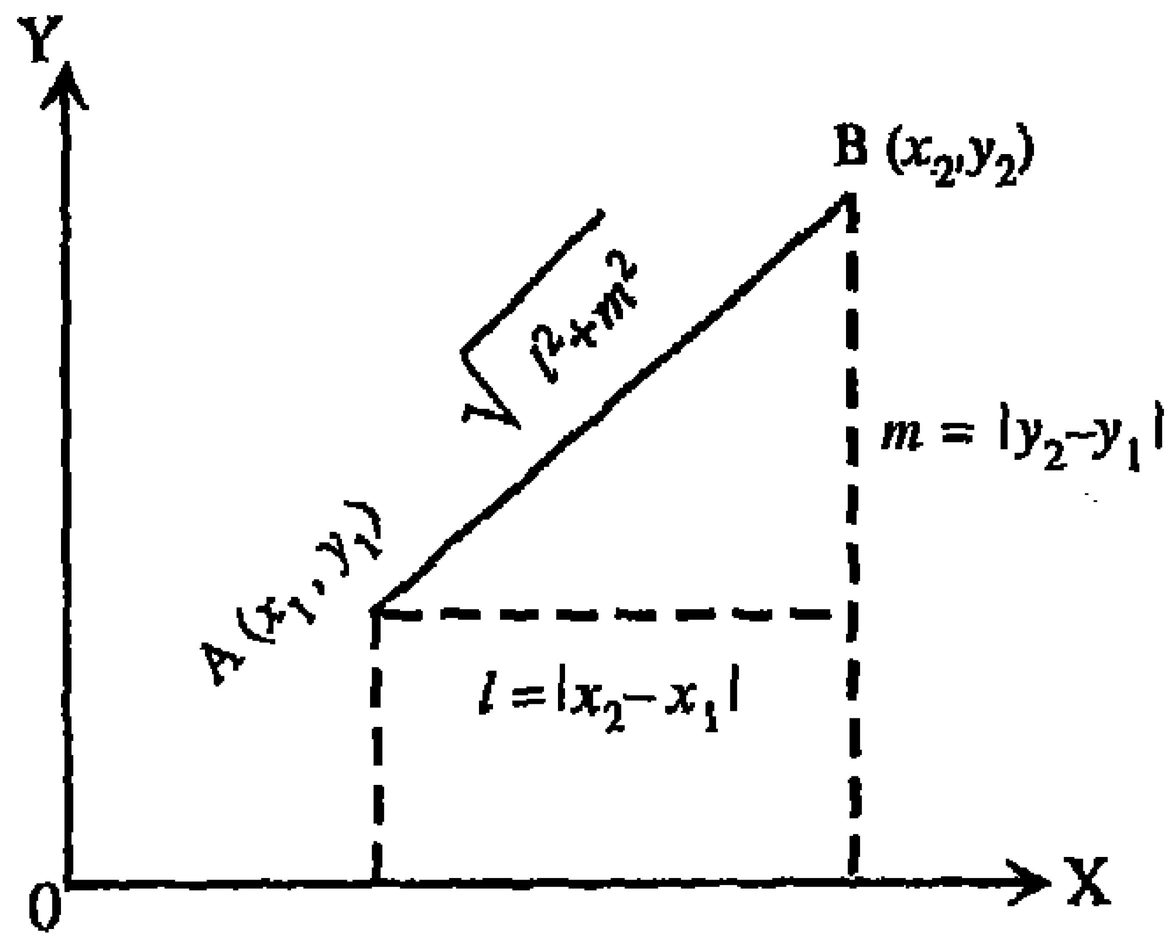
وبفـرض أننا أخـذنا أي نقطتـين في مستوى الإحداثيات الديكارتية

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

فإن
$$\| A \| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$
$$d(B, A) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= d(A, B)$$



من الملاحظ أن $d(A, B)$ ، $\|A\|$ يكافئ الطول المعتاد للمتجه A من نقطة الأصل إلى النقطة A ، المسافة المعتادة بين أي نقطتين A , B .



مثال (٤ـ٧) :

إذا كان $Y = (-2,5,3,1)$ ، $X = (4,1,-2,0)$ متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^4$ فإن

$$\|X\| = \sqrt{16+1+4+0} = \sqrt{21}$$

$$\|Y\| = \sqrt{4+25+9+1} = \sqrt{39}$$

$$d(X, Y) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (1-5)^2 + (-2-3)^2 + (0-1)^2}$$

$$= \sqrt{36+16+25+1} = \sqrt{78}$$

تعريف :

المتجه الذي معياره (طوله) يساوي 1 يسمى **متجه الوحدة** ويرمز له بالرمز E $(\|E\| = 1)$. ولأي متجه X غير صفري في الفضاء $\mathbb{R}^n$ له متجه وحده وفي نفس اتجاه X ويرمز له بالرمز E_X ويمكن الحصول عليه من العلاقة

$$E_X = \frac{X}{\|X\|}$$

تعريـــف :

تعرف الزاوية المحصورة بين المتجهين X , Y في الفضاء $\mathbb{R}^n$

حيث $X \neq 0 \quad , \quad Y \neq 0$ بالعلاقة

$$Cos\ \theta = \frac{X.Y}{\|X\|.\|Y\|} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

أي أنه ينعدم حاصل الضرب القياسي (الداخلي) للمتجهين X, Y $(X . Y= 0)$ إذا كانت الزاوية المحصورة بينهما تساوي $\frac{\pi}{2}$.

مثال (٤-٨) :

أوجد الزاوية المحصورة بين المتجهين $X = (1,0,0,1) , Y = (0,1,0,1)$

$$\|X\| = \sqrt{2} \ , \|Y\| = \sqrt{2} \quad , \quad X.Y=1$$

إذن $\quad Cos\ \theta = \frac{1}{\sqrt{2}\ .\ \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

أي أن $\quad \theta = 60°$

تعريـــف :

يكون المتجهان X , Y في الفضاء $\mathbb{R}^n$:

(i) **متعامدان** إذا كان $X . Y = 0$ (أي أن $Cos\ \theta = 0$)

(ii) **متوازيان** إذا كان $|X . Y| = \|X\|\ \|Y\| \quad (Cos\ \theta = \pm 1)$

(iii) **في نفس الاتجاه** إذا كان $X . Y = \|X\|\ \|Y\| \quad (Cos\ \theta = 1)$

مثال (٤ـ٩) :

بفرض المتجهات X, Y, Z في الفضاء $\mathbb{R}^4$ حيث

$$X = (1, 0, 0, 1) \quad , \quad Y = (0, 1, 1, 0) \quad , \quad Z = (3, 0, 0, 3)$$

فإن $X . Y = 0 \quad , \quad Y . Z = 0$

إذن X , Y متعامدان وكذلك Y , Z متعامدان .

أيضاً $X . Z = 6 \quad , \quad \|X\| = \sqrt{2} \; , \; \|Z\| = \sqrt{18}$

$$\|X\| . \|Z\| = \sqrt{36} = 6$$

$$X . Z = \|X\| . \|Z\|$$

إذن X , Z يكونان في نفس الاتجاه . ومتوازين

مثال (٤ـ١٠) :

من المثال السابق نجد أن

$$\|X\| = \sqrt{2} \; , \; \|Y\| = \sqrt{2} \; , \; \|Z\| = \sqrt{18}$$

وعليه فإن متجهات الوحدة لكل منها هي

$$E_X = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,0,1)$$

$$E_Y = \frac{1}{\sqrt{2}} (0,1,1,0)$$

$$E_Z = \frac{1}{\sqrt{18}} (3,0,0,3) = \frac{1}{3\sqrt{2}} (3,0,0,3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1,0,0,1).$$

نظرية (٤-٣) (متباينة كوشي - شفارتز):

لأي متجهين X , Y في الفضاء $\mathbb{R}^n$ فإن

$$|X . Y| \leq \|X\| . \|Y\|$$

البرهان:

إذا كان أي من المتجهين X , Y هو المتجه الصفري وليكن $X = 0$ فإن $\|X\| = 0$ ، $X.Y = 0$ وبذلك تتحق صحة المتباينة .

ويفرض أن $Y = (y_1 , y_2 , \dots , y_n)$ ، $X = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ متجهات غير صفرية فإنه لإثبات صحة المتباينة نحاول إثبات صحة المتباينات التالية

$$(1) \quad |X.Y| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i|$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|X\| \, \|Y\|$$

$$\begin{aligned} |X.Y| &= |x_1 \, y_1 + x_2 \, y_2 + \dots + x_n \, y_n| \\ &\leq |x_1 \, y_1| + |x_2 \, y_2| + \dots + |x_n \, y_n| \end{aligned}$$

$$|X.Y| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i \, y_i| \qquad (1)$$

ولإثبات صحة المتباينة الثانية نعلم أنه مما سبق لأي عددين حقيقيين $a;b \in \mathbb{R}$

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$2\,a\,b \leq a^2 + b^2$$

بفرض أن

$$a = \frac{|x_i|}{\|X\|} \ , \quad b = \frac{|y_i|}{\|Y\|}$$

$$2 \quad \frac{|x_i| \ |y_i|}{\|X\| \ \|Y\|} \leq \frac{|x_i|^2}{\|X\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|Y\|^2}$$

وإذا جمعنا طرفي المتباينة بالنسبة إلى i وعوضنا عن $|y_i|\ |x_i| = |x_i\ y_i|$

نحصل على

$$2 \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i\ y_i|}{\|X\|\ \|Y\|} \le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^2}{\|X\|^2} + \frac{|y_i|^2}{\|Y\|^2} \right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}{\|X\|^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}{\|Y\|^2} = \frac{\|X\|^2}{\|X\|^2} + \frac{\|X\|^2}{\|X\|^2}$$

$$2 \ \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i\ y_i|}{\|X\|\ \|Y\|} \le 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\ y_i| \le \|X\|\ \|Y\| \qquad (2)$$

من (2) , (1) نجد أن $|X.Y| \le \|X\|\ \|Y\|.$

نظرية (٤ ـ ٤) :

لأي متجهين X , Y في الفضاء $\mathbb{R}^n$

$$\|X+Y\| \le \|X\| + \|Y\|$$

البرهان:

من نظرية (٤ ـ ٢)

$$\|X + Y\|^2 = (X + Y).\ (X + Y)$$

$$= X.X + 2\ (X.Y) + Y.Y$$

$$= \|X\|^2 + 2\ (X.Y) + \|Y\|^2$$

وباستخدام متباينة كوش ـ شفارتز

$$\|X+Y\|^2 \le \|X\|^2 + 2\ \|X\|.\ \|Y\|^2 + \|Y\|^2 = (\|X\| + \|Y\|)^2 .$$

$$\|X+Y\|^2 \le (\|X\| + \|Y\|)^2$$

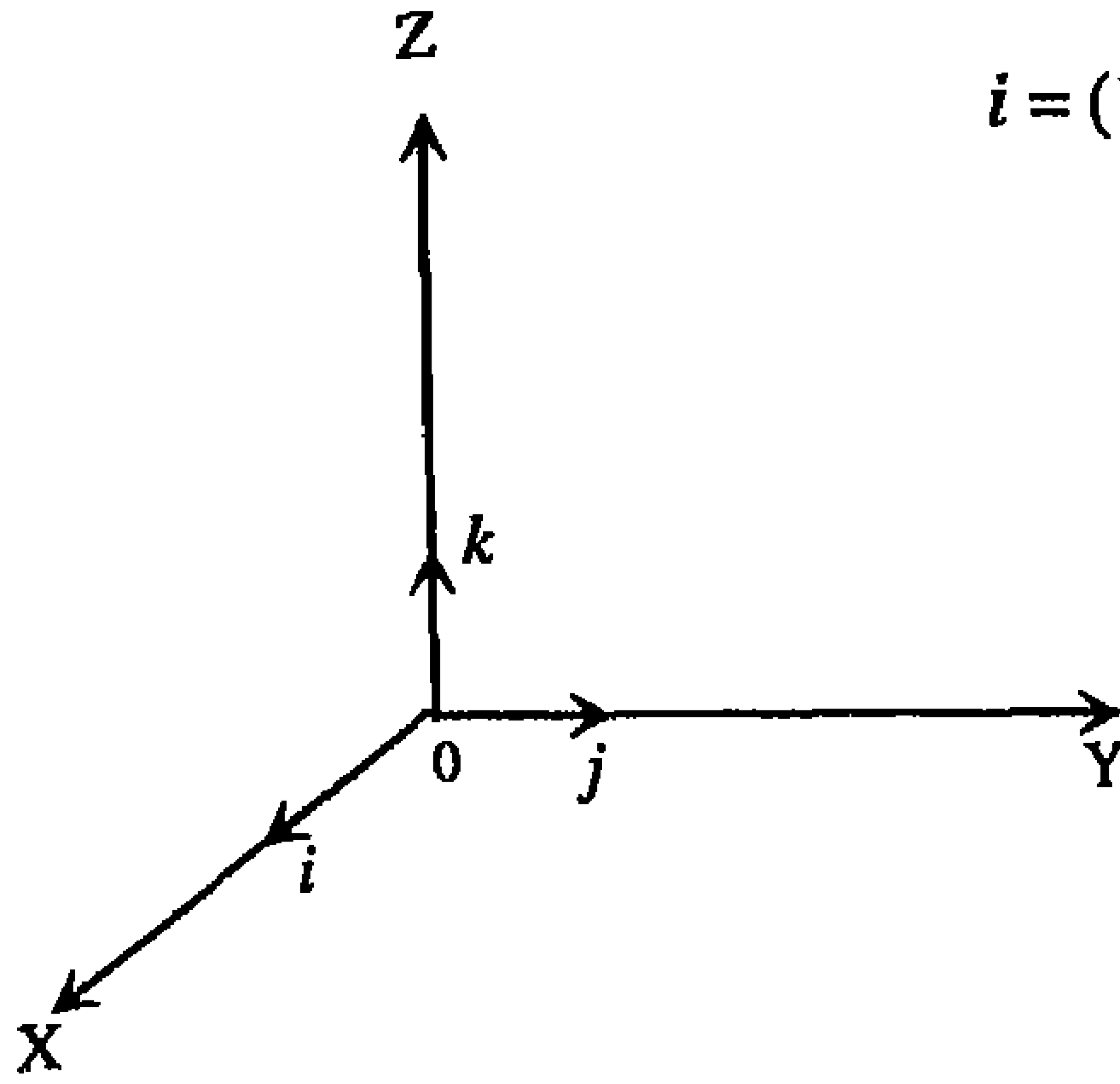
وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\|X + Y\| \le \|X\| + \|Y\|$$

ملاحظة :

في حالة $\mathbb{R}^3$ يرمز لمتجهات الوحدة في الاتجاهات الموجبة للمحاور X, Y, Z على الترتيب

$$i = (1, 0, 0) \quad , \quad j = (0, 1, 0) \quad , \quad k = (0, 0, 1)$$



كما هو موضح بالشكل المناظر .

فـــإذا كـــان $X = (x_1 , x_2 , x_3)$ أي متجه في $\mathbb{R}^3$ فإنه يمكننا كتابة المــتــجــه X بدلالة i , j , k على الصورة

$$X = x_1\, i + x_2\, j + x_3\, k$$

مثال (٤ ـ ١١) :

إذا كان $X = (2, -1, 3)$ فإن

$$X = 2i - j + 3k.$$

تعريـف :

إذا كان $Y = y_1 i + y_2 j + y_3 k$ ، $X = x_1 i + x_2 j + x_3 k$

أي متجهين في $\mathbb{R}^3$ فإنه يرمز للضرب الاتجاهي لهما بالرمز $X \times Y$ ويمكن إيجاده باستخدام القانون التالي

$$X \times Y = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, i + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, k \qquad (1)$$

كما أنه يمكن أن يعبر عن الضرب الاتجاهي في $\mathbb{R}^3$ على شكل محدد ثلاثي كما يلي

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

ويلاحظ أن الطرف الأيمن للمعادلة (2) لا تمثل في الحقيقة محدداً ولكنها تعتبر إحدى طرق تمثيل الضرب الاتجاهي وبالفك من الصف الأول نحصل على

$$X \times Y = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} k$$

وهو نفس مقدار الطرف الأيمن في المعادلة (1) .

نلاحظ مما سبق أن ناتج الضرب الاتجاهي $X \times Y$ يكون متجهاً بينما الضرب القياسي $X \cdot Y$ يكون عدداً .

مثال (٤ـ١٢):

إذا كان $Y = 3i - j - 3k$, $X = 2i + j + 2k$ فإن

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} k$$

$$= (-3+2)\,i - (-6-6)\,j + (-2-3)\,k$$

$$X \times Y = -i + 12j - 5k.$$

بعض الخواص الجبرية للضرب الاتجاهي يمكن أن توضحها النظرية التالية التي يمكن إثباتها باستخدام خواص المحددات .

نظرية (٤ـ٥) :

نفرض أن X, Y, Z ثلاثة متجهات في الفضاء $\mathbb{R}^3$ ، α عدد قياسي فإن

(i) $X \times Y = -(Y \times X)$

(ii) $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$

(iii) $(X + Y) \times Z = X \times Z + Y \times Z$

(iv) $\alpha (X \times Y) = (\alpha X) \times Y = X \times (\alpha Y)$

(v) $X \times X = 0$

(vi) $0 \times X = X \times 0 = 0$

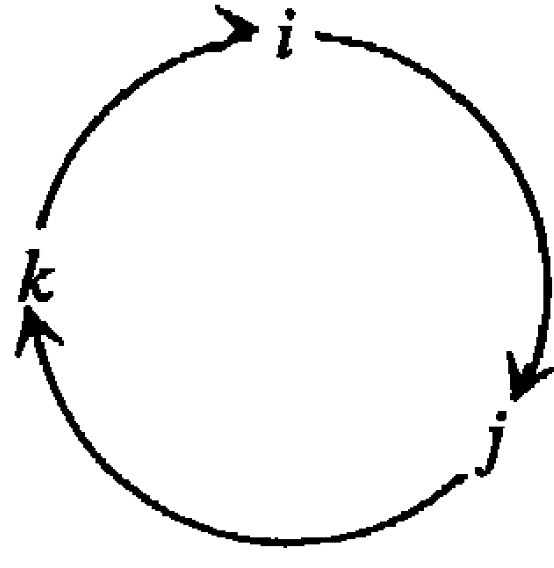
(vii) $(X \times Y) \times Z = (Z . X)\, Y - (Z . Y)\, X$

يترك البرهان كتمرين .

نلاحظ مما سبق أن : $i \times i = i \times j = k \times k = 0$

$i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$

$j \times i = -k$, $k \times j = -i$, $i \times k = -j$



هذه القوانين السابقة يمكن تذكرها باستخدام الشكل المناظر حيث إننا نرى أن حاصل الضرب الاتجاهي لمتجهين في اتجاه حركة عقارب الساعة يساوي المتجه الثالث ويساوي سالب المتجه الثالث إذا كان الاتجاه ضد حركة عقارب الساعة . والضرب الاتجاهي لأي متجه مع نفسه يساوي المتجه الصفري .

كما نلاحظ مما سبق أن العديد من خواص الأعداد الحقيقية متحققة بالنسبة للضرب الاتجاهي ولكن من الخواص الأساسية غير المتحققة هي

١ - الخاصية الإبدالية $X \times Y = -(Y \times X)$

٢ - الخاصية التجميعية حيث $i \times (i \times j) = i \times k = -j$

$(i \times i) \times j = 0 \times j = 0$

أي أن $i \times (i \times j) \neq (i \times i) \times j$

مثال (٤-١٣) :

بفرض أن

$$X = 2i + j + 2k \quad ، \quad Y = 3i - j - 3k \quad ، \quad Z = i + 2j + 3k.$$

أوجد كل من $Y \times Z$ ، $X \times Y$ ثم حقق المعادلتين :

(i) $(X \times Y) . Z = X . (Y \times Z)$

(ii) $(X . Z)\, Y - (X . Y)\, Z = X \times (Y \times Z).$

$$X \times Y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -i + 12j - 5k.$$

$$Y \times Z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3i - 12j + 7k.$$

(i) $(X \times Y) . Z = (-i + 12j - 5k). (i + 2j + 3k) = -1 + 24 - 15 = 8$

$X. (Y \times Z) = (2i + j + 2k). (3i - 12j + 7k) = 6 - 12 + 14 = 8$

إذن $(X \times Y) . Z = X . (Y \times Z)$

(ii) $$X \times (Y \times Z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -12 & 7 \end{vmatrix} = 31i - 8j - 27k.$$

$X . Y = (2i + j + 2k) . (3i - j - 3k) = 6 - 1 - 6 = -1$

$X . Z = (2i + j + 2k) . (i + 2j + 3k) = 2 + 2 + 6 = 10$

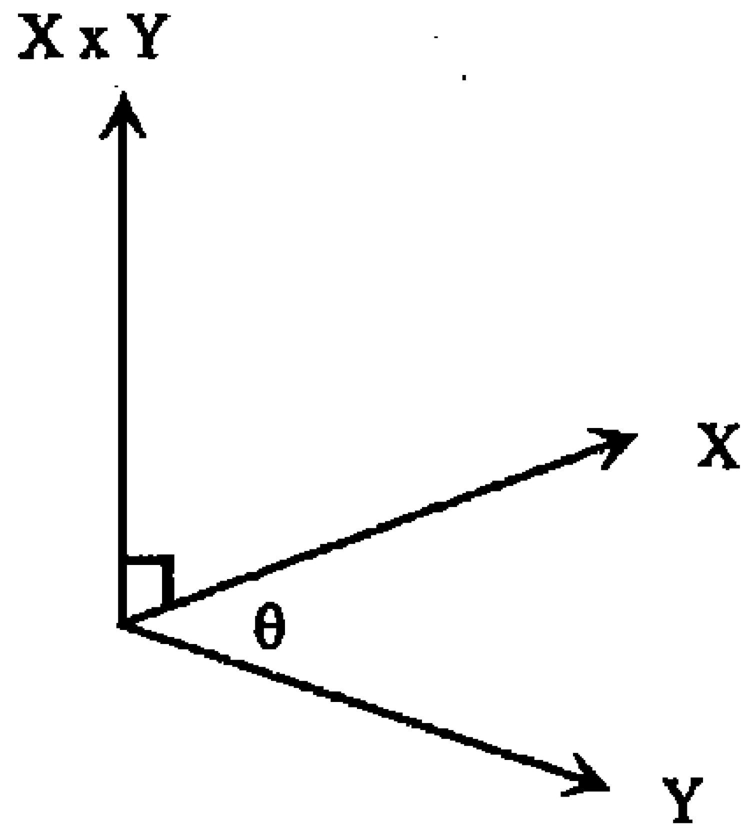
$(X . Z) Y = 10 (3i - j - 3k) = 30i - 10j - 30k$

$(X . Y) Z = -1 (i + 2j + 3k) = -i - 2j - 3k$

$(X . Z) Y - (X . Y) Z = 31i - 8j - 27k$

إذن $(X . Z) Y - (X . Y) Z = X \times (Y \times Z)$

ملاحظة :



نلاحظ مما سبق أن

$$(X x Y).Y = X.(Y x Y) = X.0 = 0$$

$$(X x Y).X = -(Y x X).X = -Y.(X x X) = -Y.0 = 0$$

من المعـادلات السابقة وتعـريف التعامد بيـن متجهين نجد أن إذا $X \times Y \neq 0$ كان $X \times Y$ متعـامـداً على المتـجهـين X , Y وأيضـاً على المسـتوى $X Y$

فإذا كـانت θ هي الزاوية بين المتـجهين X , Y فإنه يمكن حسـاب مقيـاس $X \times Y$ باستخدام القانون

$$\|X \times Y\| = \|X\| \; \|Y\| \; Sin\ \theta .$$

البرهان:

$$\|X \times Y\|^2 = (X \times Y) . (X \times Y)$$

$$= X . [Y \times (X \times Y)]$$

$$= X . [(Y.Y) X - (Y.X) Y]$$

$$= (X . X) (Y.Y) - (Y. X) (Y. X)$$

$$= \|X\|^2 \; \|Y\|^2 - (Y. X)^2$$

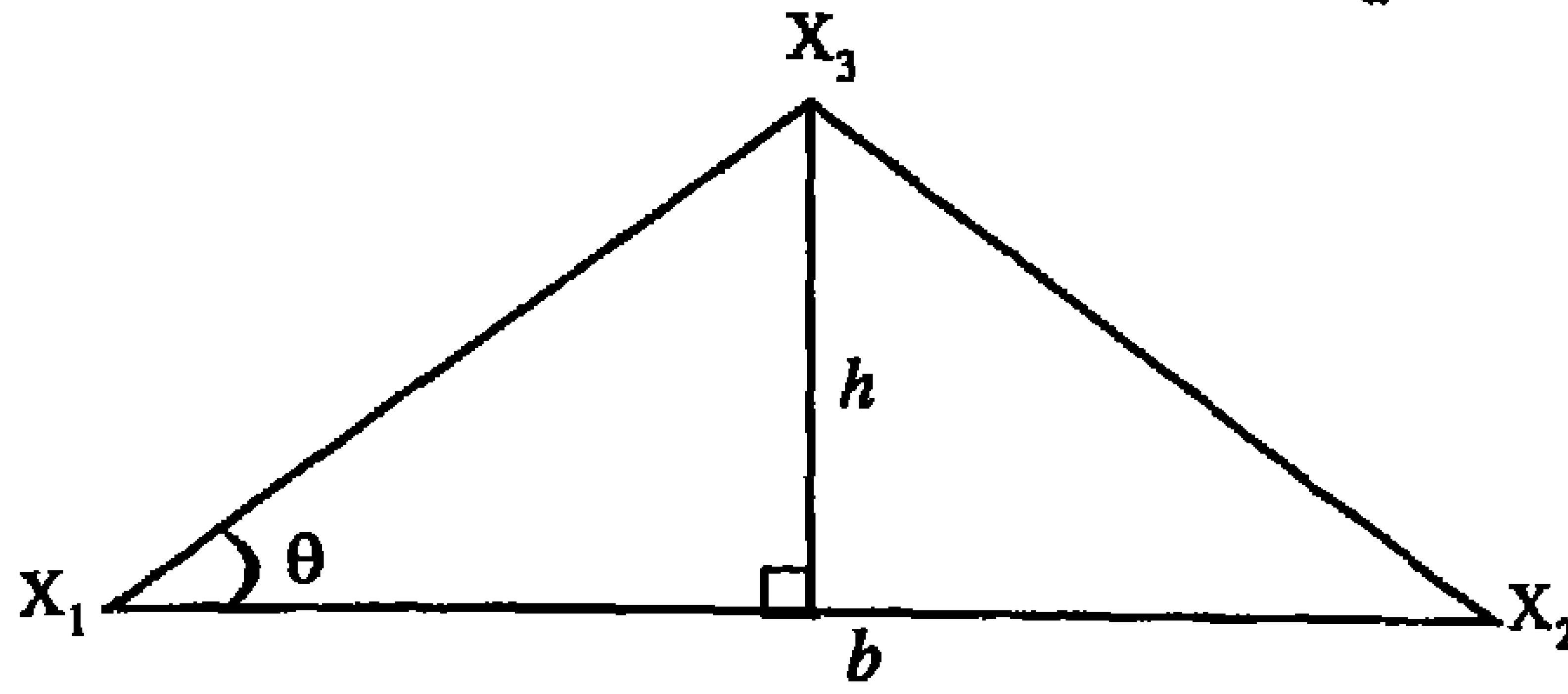
$$= \|X\|^2 \; \|Y\|^2 - \|X\|^2 \; \|Y\|^2 \; Cos^2\ \theta$$

$$= \|X\|^2 \; \|Y\|^2 \; (1 - Cos^2\ \theta)$$

$$\|X \times Y\|^2 = \|X\|^2 \; \|Y\|^2 \; Sin^2\ \theta$$

$$\|X \times Y\| = \|X\| \; \|Y\| \; Sin\ \theta$$

بعض تطبيقات الضرب الاتجاهي



١ ـ مساحة المثلث

نفرض المثلث الذي رؤوسه X_1, X_2, X_3

فيمكن حساب مساحته والتي يرمز لها بالرمز A_T باستخدام القانون

$$A_T = \frac{1}{2} bh$$

حيث b يمثل طول القاعدة ، h يمثل ارتفاع المثلث

$$h = \|X_3 - X_1\| \, Sin\,\theta \quad ، \quad b = \|X_2 - X_1\|$$

$$A_T = \frac{1}{2} \|X_2 - X_1\| \; \|X_3 - X_1\| \, Sin\;\theta$$

$$A_T = \frac{1}{2} \|(X_2 - X_1) \text{ x } (X_3 - X_1)\|$$

مثال (٤ ـ ١٤) :

أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه

$$X_1 = (2, 2, 4) \quad ، \quad X_2 = (-1, 0, 5) \quad ، \quad X_3 = (3, 4, 3)$$

$$X_2 - X_1 = -3\,i - 2\,j + k$$

$$X_3 - X_1 = j + 2\,j - k$$

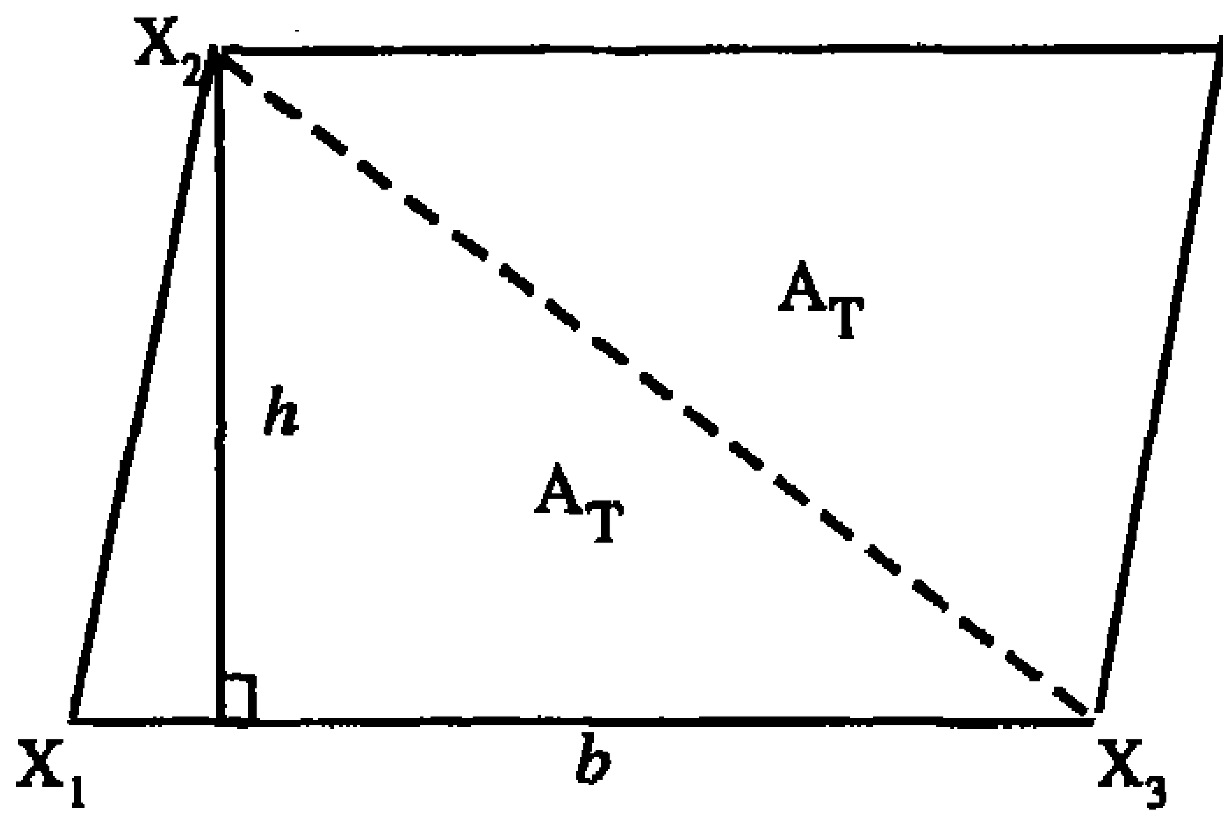
$$(X_2 - X_1) \text{ x } (X_3 - X_1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2j - 4\,k.$$

$$A_T = \frac{1}{2} \times \|(X_2 - X_1) \times (X_3 - X_1)\|$$

$$= \frac{1}{2} \times \|-2j - 4k\| = \|-j - 2k\|$$

$$A_T = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

٢ ـ مساحة متوازي الأضلاع



من الشكل المناظر يلاحظ أن مساحة متوازي الأضلاع الذي طول ضلعيه $X_2 - X_1$ ، $X_3 - X_1$ والتي يرمز لها بالرمز A_p تساوي ضعف مساحة المثلث أي أن

$$A_p = 2\ A_T$$

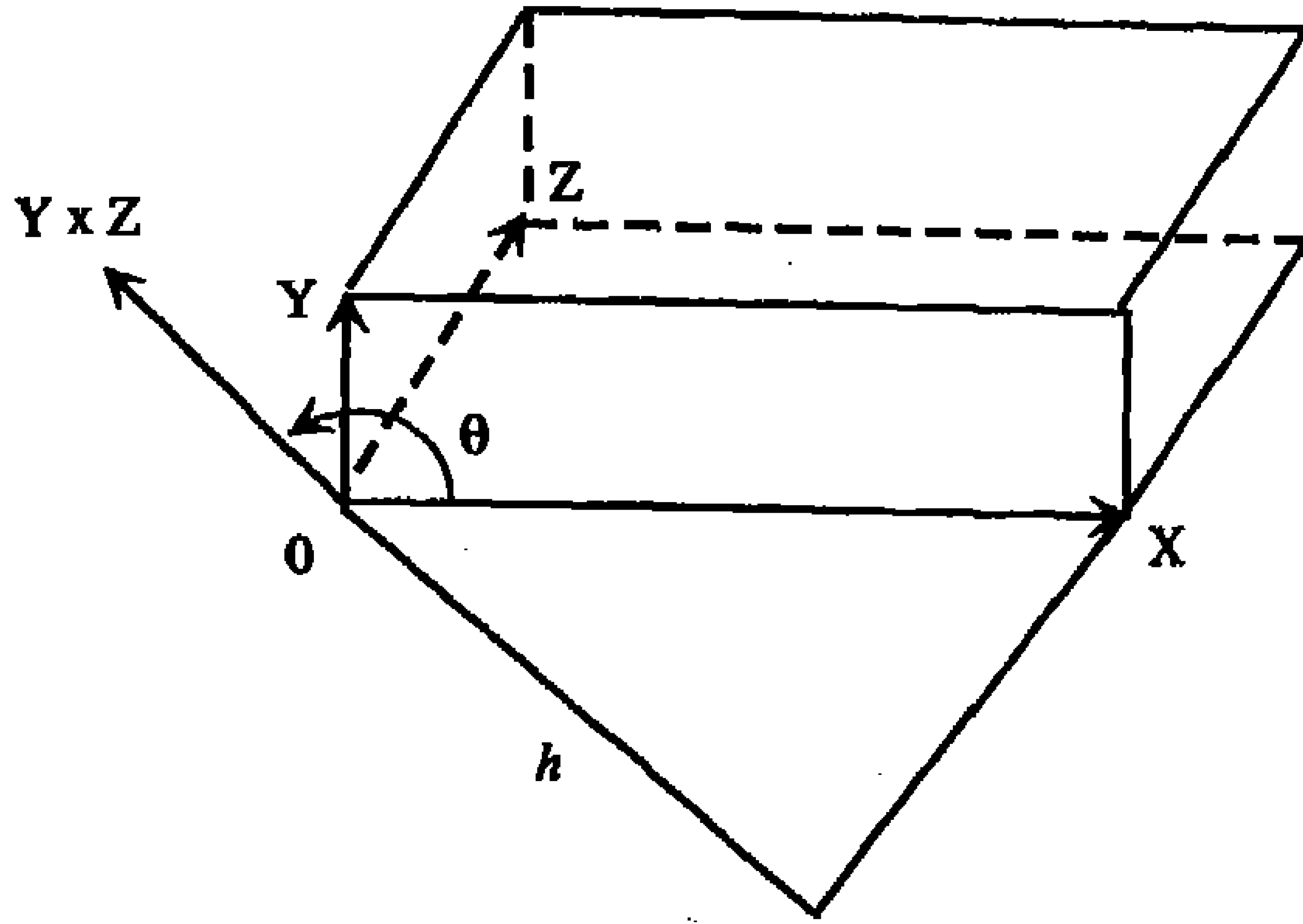
$$A_p = \|(X_2 - X_1) \times (X_3 - X_1)\|$$

مثال (٤ ـ ١٥):

إذا كانت X_1 , X_2 , X_3 كما في المثال السابق فإن مساحة متوازي الأضلاع

$$A_p = 2\sqrt{5}$$

٣ ـ حجم متوازي المستطيلات



بفرض متوازي المستطيلات كما هو موضح بالشكل رأسه عند نقطة الأصل وأحرفه X, Y, Z.

فإن حجم متوازي المستطيلات هو حاصل ضرب مساحة الوجه المحتوى على الأحرف Y, Z . والمسافة h بين هذا الوجه والوجه الموازي له .

حيث $h = \|X\| \, |Cos\ \theta|$ ، θ هي الزاوية بين $Y \times Z$, X

ومساحة الوجه المحتوى على Y, Z هي $\|Y \times Z\|$

إذن $V = \|Y \times Z\| \, \|X\| \, |Cos\ \theta|$

$= |X . (Y \times Z)|$

مثال (٤ـ١٦):

أوجد حجم متوازي المستطيلات رأسه نقطة الأصل 0 وأحرفه الثلاثة هي

$X = i - 2j + 3k$, $Y = i + 3j + k$, $Z = 2i + j + 2k.$

$$Y \times Z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5i - 5k$$

$$X . (Y \times Z) = (i - 2j + 3k) . (5i - 5k) = 5 - 15 = -10$$

$$V = |X . (Y \times Z)| = |-10| = 10$$

الأعداد المركبة :

يسمى العدد بالعدد المركب إذا كان يتكون من جزئين يسمى أحدهما بالجزء الحقيقي ويسمى الآخر بالجزء التخيلي ويكتب على الصورة $z = x + iy$ حيث x ترمز للجزء الحقيقي ، y ترمز للجزء التخيلي ، $i = \sqrt{-1}$ وكل من $x, y \in \mathbb{R}$. كما يمكن أن نعبر عن العدد المركب على صورة زوج مرتب من الأعداد الحقيقية بحيث تمثل المركبة الأولى الجزء الحقيقي ، المركبة الثانية الجزء التخيلي أي أن $z = (x, y)$ وترمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

نفرض أن لدينا العددين $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ بحيث إن $z_1 = (x_1 , y_1), z_2 = (x_2 , y_2)$ فإنه يمكن تعريف العلاقات الجبرية التالية :

(١) يتساوى العددان المركبان z_1 , z_2 إذا تساوى كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في كل منهما .

أي أن $z_1 = z_2$ إذا ـ وفقط إذا ـ كان $x_1 = x_2 , y_1 = y_2$

(٢) جمع العددين المركبين z_1 , z_2

$$z_1 + z_2 = (x_1 , y_1) + (x_2 , y_2)$$
$$= (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$$

(٣) ضرب العددين المركبين z_1 , z_2

$$z_1 \, . \, z_2 = (x_1 , y_1) \, . \, (x_2 , y_2)$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2 \; , \; x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

يلاحظ أنه أي عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$ يمكن أن يكتب على صورة عدد مركب جزؤه التخيلي يساوي صفر أي أن $x = (x , 0)$. ولهذا فإنه يمكن القول بأن مجموعة الأعداد الحقيقية مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة أي أن

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

ملاحظة:

ينعدم العدد المركب إذا انعدم كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي أي أنه $z = 0$ إذا ـ وفقط إذا ـ كان $x = y = 0$.

تعريـــف :

يعرف مرافق العدد المركب $z = (x, y) = x + i\,y$ بالعدد المركب $\bar{z}$

ويلاحظ أن

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2iy$$

$$z \,.\, \bar{z} = x^2 + y^2$$

كما يعرف المعكوس الضربي للعدد المركب z والذي يرمز له بالرمز z^{-1} على الصورة

$$z^{-1} = \frac{1}{x + i\,y} \times \frac{x - i\,y}{x - i\,y} = \frac{x - i\,y}{x^2 + y^2}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} \times i\,\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\,\bar{z}}$$

(٤) قسمة عددين مركبين z_1 , z_2

لإجراء عملية القسمة للأعداد المركبة مثل $\frac{z_1}{z_2}$ $z_2 \neq 0,$ فإننا نضرب كل من البسط والمقام في مرافق المقام $\bar{z_2}$ حتى نحصل على عدد حقيقي في المقام .

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x^2{}_2 + y^2{}_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x^2{}_2 + y^2{}_2}$$

مثال (٤ـ١٧) :

لنفرض لدينا العددين المركبين $z_1 = 4 + 3i \quad , \quad z_2 = 3 - 2i$

فـإن

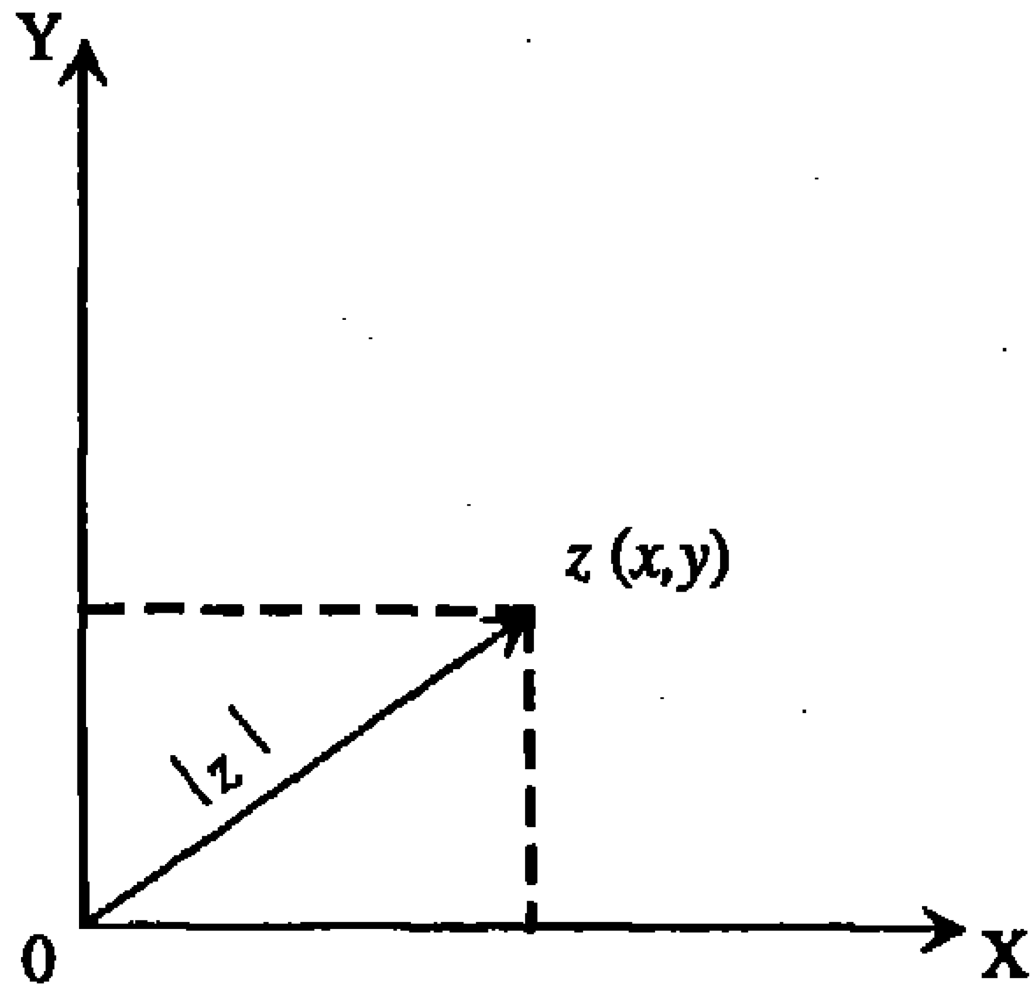
$$z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (3 - 2i) = 7 + i$$

$$z_1 - z_2 = (4 + 3i) - (3 - 2i) = 1 + 5i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 3i) \cdot (3 - 2i) = (12 + 6) + i\,(9 - 8) = 18 + i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4+3i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{(12-6) + i\;(9+8)}{9+4} = \frac{6}{13} + i\,\frac{17}{13} \;.$$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة



من المعلومات السابقة أمكن تمثيل الأعداد الحقيقية بنقاط على خط مستقيم يسمى بخط الأعداد الحقيقية وعليه فإنه من الممكن تمثيل الأعداد المركبة بنقاط في المستوى الديكارتي $\mathbb{R}^2$ وعلى وجه التحديد فإن النقطة (x, y) في المستوى X Y تمثل العدد المركب $z = x + iy$.

أي أن الجزء الحقيقي هو x والجزء التخيلي هو y .

وتعرف **القيمة المطلقة (مقياس) العدد المركب** z على أنها المسافة من نقطة الأصل 0 إلى z ويرمز لها بالرمز $|z|$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}}$$

ويلاحظ أن مقياس العدد المركب z يساوي معيار المتجه (x, y) .

مثال (٤-١٨) :

من مثال (٤-١٧) نجد أن

$$|z_1| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 .$$

$$|z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

المتجهات في الفضاء $\mathbb{C}^n$:

نسمي n من الأعداد المركبة المرتبة $(z_1 , z_2 , \ldots , z_n)$ متجهاً ذو n من المركبات حيث أن $1 \le i \le n$, $z_i \in \mathbb{C}$ والمجموعة التي تضم مثل هذه المتجهات تسمى الفضاء المركب ذو n بعداً ويرمز لها بالرمز $\mathbb{C}^n$. وكما سبق فإن عناصر $\mathbb{C}^n$ تسمى نقاطاً أو متجهات .

ويعرف جمع متجهين وضرب متجه بعدد مركب في الفضاء $\mathbb{C}^n$ على النحو التالي :

نفرض المتجهات $z, z` \in \mathbb{C}^n$ ، $\alpha \in \mathbb{C}$

حيث $z` = (z`_1 , z`_2 , \ldots , z`_n)$, $z = (z_1 , z_2 , \ldots , z_n)$

$z_i , z`_i \in \mathbb{C}$ ، $1 \le i \le n$. فإن

$$\begin{aligned} z + z` &= (z_1, z_2 , \ldots , z_n) + (z`_1 , z`_2 , \ldots , z`_n) \\ &= (z_1 + z`_1 , z_2 + z`_2 , \ldots , z_n + z`_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha z &= \alpha \ (z_1 , z_2 , \ldots , z_n) \\ &= (\alpha z_1 , \ \alpha z_2 , \ldots , \alpha z_n) \end{aligned}$$

ويعرف حاصل الضرب القياسي للمتجهين $z, z`$

$$z \cdot z` = z_1 \overline{z`}_1 + z_2 \overline{z`}_2 + \ldots + z_n \overline{z`}_n$$

ويعرف معيار المتجه z

$$\|z\| = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + \ldots + z_n \overline{z_n}}$$

$$= \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2}$$

ويلاحظ أن $z \cdot z \geq 0$ ، $\|z\| \geq 0$ عندما $z \neq 0$

ويعرف الفضاء $\mathbb{C}^n$ المعرف عليه جمع المتجهات وضرب المتجهات بعدد مركب والضرب القياسي للمتجهات بالفضاء الإقليدي المركب ذو n مركبات .

مثال (٤-١٩) :

نفرض لدينا المتجهين

$$z = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$$

$$z` = (5 + i, 2 - 3i, 5)$$

فـإن

$$(1)\ z + z` = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i) + (5 + i, 2 - 3i, 5)$$
$$= (8 - i, i + 2, 6 + 6i)$$

$$(2)\ 4i z = 4i(3 - 2i, 4i, 1 + 6i) = (8 + 12i, -16, -24 + 4i)$$

$$(3)\ (1 - 2i)\ z + (3 + i)\ z` = (1 - 2i)(3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$$
$$+ (3 + i)(5 + i, 2 - 3i, 5)$$
$$= (-1 - 8i, 8 + 4i, 13 + 4i) + (14 + 8i, 9 - 7i, 15 + 5i)$$
$$= (13, 17 - 3i, 28 + 9i).$$

(4) $z.z' = (3-2i, 4i, 1+6i).(5+i, 2-3i, 5)$

$= (3-2i).\overline{(5+i)} + 4i.\overline{(2-3i)} + (1+6i).\overline{(5)}$

$= (3-2i).(5-i) + 4i(2+3i) + (1+6i).5$

$= 13-13i-12+8i+5+30i = 6+25i$

(5) $z'.z = (5+i, 2-3i, 5).(3-2i, 4i, 1+6i)$

$= (5+i)\overline{(3-2i)} + (2-3i)\overline{(4i)} + 5\overline{(1+6i)}$

$= (5+i)(3+2i) + (2-3i)(-4i) + 5(1-6i)$

$= 13+13i-12-8i+5-30i = 6-25i$

(6) $\|z\| = \sqrt{z.z} = \sqrt{(3-2i).\overline{(3-2i)} + 4i\overline{(4i)} + (1+6i)\overline{(1+6i)}}$

$= \sqrt{(3-2i)(3+2i) + 4i(-4i) + (1+6i)(1-6i)}$

$= \sqrt{13+16+37} = \sqrt{66}$

$\|z'\| = \sqrt{z'.z'} = \sqrt{(5+i)\overline{(5+i)} + (2-3i)\overline{(2-3i)} + 5.\overline{5}}$

$= \sqrt{(5+i)(5-i) + (2-3i)(2+3i) + 25}$

$= \sqrt{26+13+25} = \sqrt{64} = 8.$

تمـــارين (٤)

١ - أوجد كلاً من $\| Y \|, \| X \|, d(X, Y), X + Y, X . Y, Y . X$ إذا كان

(i) $X = (2, 3, -1, 0)$, $Y = (5, 3, 2, 1)$

(ii) $X = (2, 0, -4)$, $Y = (3, 2, 1)$

(iii) $X = (3, -1, 2, 1)$, $Y = (-3, 4, 0, 1)$

٢ - أوجد كلاً من $3X - 2Y$, $2X$, $X - Y$ إذا كان

(i) $X = (1, 2, -3)$, $Y = (0, 1, -2)$

(ii) $X = (4, -2, 1, 3)$, $Y = (-1, 2, 5, -4)$

(iii) $X = (-3, 5, -3, 0)$, $Y = (2, 1, 5, -2)$

٣ - أوجد قيم كل من x, y في المعادلات التالية

(i) $x(1, 2) = -4(y, 3)$

(ii) $x(2, y) = y(1, -2)$

(iii) $(x, x + y) = (y - 2, 6)$

(iv) $x(3, 2) = 2(y, -1)$

٤ - بفرض المتجهات

$$X = (1, -2, 3) \ , \ Y = (-3, 2, 3) \ , \ Z = (x, -4, y) \ , \ W = (3, w, 2)$$

أوجد كلاً من x, y, w إذا كان

(i) $Z + W = Y$

(ii) $Z + Y = X$

(iii) $Z = 2X$

٥ - بفرض المتجهات

$$X = (4, -1, -2, 3) \quad , \quad Y = (3, -2, -4, 1)$$
$$Z = (x, -3, -6, y) \quad , \quad W = (2, u, v, 4)$$

أوجد كلاً من x, y, u, v إذا كان

(i) $Z - X = Y$

(ii) $Z + W = X$

(iii) $Z = 3X$

٦ - أوجد طول كل من المتجهات التالية

(i) $(0, -1, 2, 3)$

(ii) $(1, 2, -3, -4)$

(iii) $(2, 3, 4)$

(iv) $(-1, -2, 0)$

٧ - أوجد المسافة بين كل زوج من النقط التالية

(i) $(4, 2, -1, 5) \quad , \quad (2, 3, -1, 4)$

(ii) $(0, 0, 2) \quad , \quad (-3, 0, 0)$

(iii) $(1, -1, 2) \quad , \quad (3, 0, 2)$

(iv) $(1, 0, 0, 2) \quad , \quad (3, -1, 5, 2)$

٨ - أياً من المتجهات التالية

$$X_1 = (4, 2, 6, -8) \quad , \quad X_2 = (-2, 3, -1, -1) \quad , \quad X_3 = (-2, -1, -3, 4)$$
$$X_4 = (1, 0, 0, 2) \quad , \quad X_5 = (1, 2, 3, -4) \quad , \quad X_6 = (0, -3, 1, 0)$$

(أ) متعامدة (ب) متوازية (حـ) في نفس الاتجاه .

٩ - حقق نظرية (٤-٤) للمتجهين $X = (1, 2, 3, -1)$, $Y = (1, 0, -2, 3)$

١٠- أوجد متجه الوحدة للمتجهات التالية

(i) $X = (0, 0, 2, 0)$

(ii) $X = (0, 0, 3, 4)$

(iii) $X = (1, 2, -1)$

(iv) $X = (-1, 0, -2)$

١١ - إذا كان $X = (4 - 3i, 2i, 5, 6 - i)$, $Y = (3 - i, 3 - 6i, 2i, -4)$

فأوجد كلاً من

(i) $\|X\|$, $\|Y\|$

(ii) $(3 + i)\, X - (2 - i)\, Y$

(iii) $X + Y$, $X - Y$

(iv) $\|X - Y\|$

١٢- أثبت أنه إذا كان لدينا المتجه $E_i \in \mathbb{R}^n$ بحيث إن جمع مركباته تساوي صفراً ما عدا المركبة i تساوي الواحد أي أن

$E_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $E_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$, $E_n = (0, 0, \ldots, 1)$

وأي متجه $A \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

فإن

(i) $A = a_1 E_1 + a_2 E_2 + \ldots + a_n E_n$

(ii) $A \cdot E_i = a_i \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

١٣- اكتب كلاً من المتجهات التالية في $\mathbb{R}^3$ بدلالة i, j, k

(i) $(1, 2, -3)$

(ii) $(2, 3, -1)$

(iii) $(0, 1, 2)$

(iv) $(0, 0, -2)$

١٤- أثبت أن $i.i = j.j = k.k = 1 \quad , \quad i.j = j.k = i.k = 0$

١٥ - اكتب كلاً من المتجهات التالية في $\mathbb{R}^3$ بدلالة المركبات

(i) $2i + 3j - 4k$.

(ii) $-3i$

(iii) $i + 2j$

(iv) $3i - 2k$

١٦ - أثبت أن المثلث الذي رؤوسه

$$P_1(2, 3, -4) \quad , \quad P_2(3, 1, 2) \quad , \quad P_3(7, 0, 1)$$

يكون قائم الزاوية . ثم أوجد مساحته .

١٧ - بفرض $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ أثبت أن

(i) $(X \times Y) . Z = X . (Y \times Z)$

(ii) $X \times (Y \times Z) = (X . Z) Y - (X . Y) Z$

(iii) $(X \times Y) . Z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

١٨- أوجد $X \times Y$ إذا كان

(i) $X = 2i + 3j + 4k \quad , \quad Y = -i + 3j - k$.

(ii) $X = (1, 0, 1) \quad , \quad Y = (2, 3, -1)$

(iii) $X = 2i + j - 2k \quad , \quad Y = i + 3k$

(iv) $X = (4, 0, -2) \quad , \quad Y = (0, 2, -1)$.

١٩ - حقق نظرية (٤ - ٥) إذا كان

$$X = i + 2j - 3k \quad , \quad Y = 2i + 3j + k$$

$$Z = 2i - j + 2k \quad , \quad \alpha = -3$$

٢٠ - أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه

$$X_1 = (1, -2, 3) \quad , \quad X_2 = (-3, 1, 4) \quad , \quad X_3 = (0, 4, 3)$$

٢١ - أوجد مساحة متوازي الأضلاع حيث أطوال أحرفه (أضلاعه الجانبية)

$$X_2 - X_1 = i + 3j - 2k \quad , \quad X_3 - X_1 = 3i - j - k$$

٢٢ - أوجد حجم متوازي المستطيلات الذي فيه :

(i) $X = 2i - j \quad , \quad Y = i - 2j - 2k \quad , \quad Z = 3i - j + k$

(ii) $X = i - 2j + 4k \quad , \quad Y = 3i + 4j + k \quad , \quad Z = -i + j + k$.

الباب الخامس

الفضاءات والفضاءات الجزئية المتجهة

VECTOR SPACES & SUBSPACES

الباب الخامس

الفضاءات والفضاءات الجزئية المتجهة

Vector Spaces and Subspaces

تعريـــف :

نفرض V مجموعة غير خالية معرف عليها العمليتان $\otimes , \oplus$ تسمى V **فضاءاً متجهاً** على $\mathbb{K}$ وتسمى عناصر V **متجهات** وعناصر $\mathbb{K}$ **أعداداً قياسية** إذا تحققت الشروط التالية :

لكل $X, Y, Z \in V \quad ; \quad \alpha , \beta \in \mathbb{K}$

١ - $X \oplus Y \in V \quad , \quad \alpha \otimes X \in V$

٢ - $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$

٣ - $X \oplus Y = Y \oplus X$

٤ - يوجد عنصر وحيد $0 \in V$ بحيث $X \oplus 0 = 0 \oplus X = X$

٥ - يوجد عنصر وحيد $-X \in V$ بحيث $X \oplus (-X) = (-X) \oplus X = 0$
ويسمى $-X$ بسالب (النظير الجمعي) X

٦ - $\alpha \otimes (X \oplus Y) = \alpha \otimes X \oplus \alpha \otimes Y$

٧ - $(\alpha + \beta) \otimes X = \alpha \otimes X \oplus \beta \otimes X$

٨ - $(\alpha \beta) \otimes X = \alpha \otimes (\beta \otimes X)$

٩ - يوجد $1 \in \mathbb{K}$ بحيث $1 \otimes X = X$

وأن قانون الحذف يتحقق لأي ثلاثة متجهات $X , Y , Z \in V$

إذا كان $X \oplus Y = X \oplus Z$ فإن $Y = Z$

كما تسمى العملية $\oplus$ الجمع الاتجاهي ، والعملية $\otimes$ الضرب بعدد قياسي وللتبسيط سوف نرمز فيما بعد للعملية $X \oplus Y$ بالرمز $X + Y$ والعملية $\alpha \otimes X$ بالرمز αX .

مثال (٥ ـ ١) :

١ - نفرض $\mathbb{K}$ مجالاً ما فإن مجموعة كل العناصر المرتبة التي على الصورة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف عليها عمليتا الجمع والضرب بعدد $\alpha \in \mathbb{K}$ بحيث إن $1 \le i \le n$, $x_i \in \mathbb{K}$.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\alpha. (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

حيث $x_i, y_i, \alpha \in \mathbb{K}, 1 \le i \le n$ تكون فضاءاً متجهاً على المجال $\mathbb{K}$ ونرمز لهذا الفضاء بالرمز $\mathbb{K}^n$ ويكون المتجه الصفري له هو مجموعة مكونة من n من الأصفار $(0, 0, \ldots, 0)$.

وإذا كانت $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ فإننا نحصل على الفضاء الاتجاهي $\mathbb{R}^n$ (الذي يسمى فضاءاً اتجاهياً حقيقياً نسبة إلى الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$) .

وإذا كانت $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ فإننا نحصل على الفضاء الاتجاهي $\mathbb{C}^n$ (الذي يسمى فضاءاً اتجاهياً مركباً نسبة إلى الأعداد المركبة $\mathbb{C}$) .

٢ - نفرض V مجموعة جميع المصفوفات من النوع $m \times n$ والتي عناصرها أعداد حقيقية مع عمليتي جمع المصفوفات والضرب في أعداد قياسية تكون فضاءاً اتجاهياً . المصفوفة الصفرية من النوع $m \times n$ تكون هي المتجه الصفري 0 . وإذا كانت المصفوفة A من النوع $m \times n$ فإن المصفوفة $-A$ هي النظير الجمعي للمصفوفة A . ويرمز لهذا الفضاء بالرمز M_{mn} .

٣ - نفرض V مجموعة كثيرات الحدود $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ والتي معاملاتها $0 \le i \le n$, a_i تنتمي إلى مجال الأعداد الحقيقية . بذلك تكون V مع عمليتي جمع كثيرات الحدود وضربها بعدد قياسي ينتمي إلى $\mathbb{R}$ فضاءاً اتجاهياً .

٤ - نفرض V مجموعة الدوال الحقيقية إذا كانت $f = f(x)$, $g = g(x)$ أي دالتين من هذه المجموعة ، α أي عدد حقيقي فإننا نعرف دالة المجموع $f + g$ ، والضرب القياسي αf كما يلي

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

تكون فضاءاً اتجاهياً مع العلم بأن المتجه الصفري هو الدالة الثابتة الصفرية 0 التي تحقق العلاقة $0(x) = 0$ لجميع قيم x ، 0 .

نظرية (٥ ـ ١) :

إذا كان V فضاءاً اتجاهياً فإن :

(١) $0X = 0$ لكل متجه $X \in V$

(٢) $\alpha 0 = 0$ لكل عدد قياسي α

(٣) إذا كان $\alpha X = 0$ فإن $\alpha = 0$ أو $X = 0$

(٤) $(-1)X = -X$ لكل متجه $X \in V$

البرهان:

(١) $0X = (0+0)X = 0X + 0X$

$0X + 0X = 0X$

بإضافة $-0X$ إلى كل من الطرفين

$(0X + 0X) + (-0X) = 0X + (-0X)$

$0X + (0X + (-0X)) = 0$

$0X + 0 = 0$

إذن $0X = 0$

(٢) يتبع مثل ما أتبع في إثبات (١)

(٣) نفرض أن $\alpha X = 0$ ، $\alpha \neq 0$

$(\frac{1}{\alpha})(\alpha X) = (\frac{1}{\alpha})\, 0$

$((\frac{1}{\alpha})\, \alpha)\, X = 0$

$(1)\, X = 0$

إذن $X = 0$

وبالمثل إذا كانت $X \neq 0$ فإن $\alpha = 0$

أي أنه إذا كانت $\alpha X = 0$ فإن $X = 0$ أو $\alpha = 0$

(٤) $(-1)X + X = (-1)X + (1)X = (-1+1)X = 0.X = 0$

إذن $(-1)X = -X$

تعريـــف :

إذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتجه V وكانت W فضاءاً متجهاً على المجال $\mathbb{K}$ مع عمليتي الجمع والضرب بعدد قياسي المعرفتين على V فإن W تسمى **بفضاء اتجاهي جزئي** من الفضاء V .

مثال (٥ ـ ٢) :

لأي فضاء متجه V تكون المجموعة {0} التي تحتوي على المتجه الصفري والفضاء الكلي V نفسه فضائين جزئيين من V . أي أنه أي فضاء متجه له على الأقل فضاءان جزئيان منه .

مثال (٥ ـ ٣) :

الفضاء المتجه $\mathbb{R}^2$ جزئي من الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ حيث

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b,0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

بفرض أن $Y = (a_2, b_2, 0)$, $X = (a_1, b_1, 0)$ متجهات في $\mathbb{R}^2$

$$X + Y = (a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0)$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha X = \alpha (a_1, b_1, 0) = (\alpha a_1, \alpha b_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \quad , \alpha \in \mathbb{R}$$

ويمكن التأكد من أن جميع شروط الفضاء المتجه متحققة على $\mathbb{R}^2$.

مثال (٥ ـ ٤) :

نفرض V هو الفضاء المتجه المكون لجميع المصفوفات المربعة من النوع $n \times n$ فإن المجموعة التي تتكون من المصفوفات المتماثلة $(a_{ij} = a_{ji})$ تكون فضاءاً متجهاً جزئياً من V .

مثال (٥ ـ ٥) :

نفرض V فضاء كثيرات الحدود من درجة n فإن المجموعة التي تتكون من كثيرات الحدود التي درجتها أصغر من أو تساوي n تكون فضاءاً جزئياً من V .

مثال (٥ ـ ٦):

نفرض V فضاء الدوال المعرفة من المجموعة غير الخالية X إلى $\mathbb{R}$ فإن المجموعة التي تتكون من الدوال المحدودة في V تكون فضاءاً جزئياً من V .

نظرية (٥ ـ ٢) :

إذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتجه V فإن W تكون فضاءاً متجهاً جزئياً من V إذا ـ وفقط إذا ـ كان

(أ) معرف على W جمع المتجهات بمعنى أنه إذا كان

$$X, Y \in W \quad \Rightarrow \quad X + Y \in W$$

(ب) معرف على W الضرب بعدد قياسي أي أنه إذا كان

$$X \in W \quad , \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \alpha X \in W$$

البرهان :

أولاً : نفرض أن W فضاء جزئي متجه من V

إذن جميع شروط الفضاء المتجه تكون متحققة على V ومنها الشرط (١) من التعريف وبالتالي فإن الشرطين (أ) ، (ب) متحققان .

وبالعكس بفرض أن W يحقق الشرطين (أ) ، (ب) والمطلوب إثبات أن W يحقق شروط الفضاء المتجه لكي يكون فضاءاً متجهاً جزئياً من V (حيث إنه مجموعة جزئية من V) .

وحيث إن الشرطين (أ) ، (ب) متحققان لذلك نحتاج فقط لإثبات أن W يحقق بقية الشروط (٢ - ٩) ولكن جميع هذه الشروط ما عدا ٤ ، ٥ تتحقق تلقائياً للمتجهات الموجودة في W حيث إنها تتحقق لجميع المتجهات الموجودة في V.لذلك لإكمال الإثبات نحتاج فقط للتأكد من أن ٤ ، ٥ يتحققان في W .

نفرض $X \in W$ إذن $\alpha X \in W$ لأي عدد قياسي α

بوضع $\alpha = 0$ نحصل على $0\,X = 0 \in W$

وبوضع $\alpha = -1$ نحصل على $(-1)\,X = -X \in W$.

إذن W فضاء جزئي متجه من الفضاء المتجه V .

مثال (٥ ـ ٧) :

أثبت أن W المجموعة المكونة من جميع المصفوفات من النوع 2 x 2 والتي تحتوي أصفاراً على القطر الرئيسي تكون فضاءاً جزئياً للفضاء المتجه M_{22} المكون من جميع المصفوفات من النوع 2 x 2 .

نفرض أن
$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

أي مصفوفتان من W ، α أي عدد قياسي فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{21} + b_{21} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha\ A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

حيث إن $A + B$, $\alpha\ A$ تحتويان أصفاراً على القطر الرئيسي فإنهما ينتميان إلى W . ولهذا فإن W فضاء جزئي من M_{22} .

مثال (٥ ـ ٨) :

نفرض لدينا m من المعادلات المتجانسة في n من المجاهيل وأن $a_{ij} \in \mathbb{R}$ حيث $1 \le j \le n$, $1 \le i \le m$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

يلاحظ أنه أي حل لهذه المجموعة على الصورة $(r_1 , r_2 , \dots , r_n)$ بحيث إن $r_i \in \mathbb{R} , 1 \le i \le n$. وعلى ذلك فإن هذا الحل يمثل نقطة في $\mathbb{R}^n$. وهذا يؤدي إلى أن المجموعة التي تحتوي جميع حلول المجموعة المتجانسة فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$ وتسمى بفضاء الحل .

مثال (٥ ـ ٩) :

بفرض W مجموعة جميع المصفوفات من النوع 2 x 3 التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

حيث $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}$

إذن W تكون مجموعة جزئية من الفضاء المتجه M_{23} وبالتالي فإنها تكون فضاء جزئي متجه من الفضاء المتجه M_{23} وذلك لأنه لأي مصفوفتين $A, B \in W$

حيث
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}\, b_{11} & a_{12} + b_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix} \in W$$

ولأي عدد قياسي α

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & 0 \\ 0 & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{bmatrix} \in W$$

إذن W فضاءاً جزئياً من الفضاء M_{23}

مثال (٥ ـ ١٠) :

نستعرض في هذا المثال الطريقة المبسطة لتكوين فضاءات جزئية من الفضاء المتجه V .

لأي متجهين $Z_1 , Z_2 \in V$ نفرض W مجموعة جزئية من الفضاء المتجه V والتي تتكون من المتجهات على الصورة

$$a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \quad , \quad a_1 , a_2 \in \mathbb{R}$$

أي أن $W = \{a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \mid Z_1, Z_2 \in V \, ; \, a_1 , a_2 \in \mathbb{R}\}$

لإثبات أن W فضاء جزئي متجه من الفضاء المتجه V

نفرض أي متجهين $X, Y \in W$ على الصورة

$$X = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 \quad , \quad Y = b_1 Z_1 + b_2 Z_2$$

حيث $a_1 , a_2 , b_1 , b_2 \in \mathbb{R}$

إذن $X + Y = (a_1 Z_1 + a_2 Z_2) + (b_1 Z_1 + b_2 Z_2)$

$$= (a_1 + b_1) Z_1 + (a_2 + b_2) Z_2 \in W$$

ولأي عدد قياسي α

$$\alpha X = \alpha (a_1 Z_1 + a_2 Z_2) = (\alpha a_1) Z_1 + (\alpha a_2) Z_2 \in W$$

إذن W فضاءاً جزئياً من الفضاء المتجه V .

نظرية (٥ ـ ٣) :

تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية من فضاء متجة V هو فضاء جزئي من V .

البرهان:

نفرض U , W فضائين جزئيين من الفضاء المتجه V

ونحاول إثبات أن $U \cap W$ هو أيضاً فضاء جزئي من V

بما أن U , W فضاءان جزئيان من V فإن $0 \in U \ , \ 0 \in W$

إذن $0 \in U \cap W$

نفرض $X , Y \in U \cap W$ إذن $X, Y \in U \ ; \ X, Y \in W$

وحيث إن U , W فضاءان جزئيان فإن

$$\alpha X + \beta Y \in U \quad , \quad \alpha X + \beta Y \in W$$

أياً كان مقدار العددان $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$

وبالتالي فإن $\alpha X + \beta Y \in U \cap W$

وهذا يؤدي إلى أن $U \cap W$ فضاء جزئي من V

ومع التعميم فإن تقاطع أي عدد من الفضاءات الجزئية من فضاء متجه V هو فضاء جزئي من V .

تعريف :

نفرض V فضاءاً متجهاً على المجال $\mathbb{K}$ وليكن $X_1 , X_2 , \dots , X_n \in V$ يسمى أي متجه $X \in V$ **تركيباً خطياً للمتجهات** $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ إذا أمكن كتابته على الصورة $X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ حيث $a_i \in \mathbb{K} , 1 \le i \le n$.

مثال (٥ ـ ١١) :

في الفضاء المتجه $\mathbb{R}^4$ ، نفرض المتجهات

$$X_1 = (1, 2, 1, -1) \quad , \quad X_2 = (1, 0, 2, -3) \quad , \quad X_3 = (1, 1, 0, -2)$$

يكون المتجه $X = (2, 1, 5, -5)$ تركيباً خطياً للمتجهات X_1 , X_2 , X_3 إذا أمكن إيجاد $a_1 , a_2 , a_3 \in \mathbb{R}$ بحيث إن

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

$$(2, 1, 5, -5) = a_1 (1, 2, 1, -1) + a_2 (1, 0, 2, -3) + a_3 (1, 1, 0, -2)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 , 2a_1 + a_3 , a_1 + 2a_2 , - a_1 -3 a_2 -2 a_3)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على مجموعة المعادلات

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2 \\ 2 a_1 + a_3 &= 1 \\ a_1 + 2 a_2 &= 5 \\ - a_1 - 3 a_2 - 2 a_3 &= - 5 \end{aligned}$$

بحل هذا النظام من المعادلات بطريقة الحذف المتتالي نحصل على

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_3 = -1$$

وهذا يعني أن المتجه X تركيب خطي لمجموعة المتجهات X_1 , X_2 , X_3 .

$$(2, 1, 5, -5) = 1 (1, 2, 1, -1) + 2 (1, 0, 2, -3) -1 (1, 1, 0, -2)$$

$$X = X_1 + 2 X_2 - X_3$$

مثال (٥ ـ ١٢) :

اعتبر المتجهين $X_1 = (1, 2, -1)$, $X_2 = (6, 4, 2)$ من $\mathbb{R}^3$

بين أن $X = (9, 2, 7)$ يكون تركيب خطي مع X_1 , X_2

وأن $X` = (4, -1, 8)$ لا يكون تركيب خطي مع X_1 , X_2

لكي يكون X تركيب خطي مع X_1 , X_2 يجب أن تكون هناك أعداد قياسية a_1 , a_2 بحيث يكون

$$X = a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$(9, 2, 7) = a_1 (1, 2, -1) + a_2 (6, 4, 2)$$

$$= (a_1 + 6 a_2 , 2 a_1 + 4 a_2 , - a_1 + 2 a_2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة $a_1 + 6 a_2 = 9$

$$2 a_1 + 4 a_2 = 2$$

$$- a_1 + 2 a_2 = 7$$

بحل هذا النظام نجد أن $a_1 = -3, a_2 = 2$

إذن $X = -3 X_1 + 2 X_2$

وبالمثل مع المتجه $X`$

$$(4, -1, 8) = a_1 (1, 2, -1) + a_2 (6, 4, 2)$$

$$= (a_1 + 6 a_2 , 2 a_1 + 4 a_2 , - a_1 + 2 a_2)$$

$$a_1 + 6 a_2 = 4$$

$$2 a_1 + 4 a_2 = -1$$

$$- a_1 + 2 a_2 = 8$$

هذا النظام غير متوافق وبالتالي لا يمكن إيجاد a_1 , a_2 ومن ثم فإن $X`$ لا يكون تركيب خطي مع X_1 , X_2 .

تعريـــف :

نفـرض المـجمـوعـة $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ لمتجهـات فـي الفضـاء المتجه V فإننا نقول إن المجموعة S ولدت V أو أن V ولد بواسطة S إذا كان كل متجه في V عبارة عن تركيب خطي مع متجهات المجموعة S .

مثال (٥ ـ ١٣) :

نفرض الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ والمجموعة $S = \{X_1, X_2, X_3\}$ بحيث

$$X_1 = (1, 1, 2) \quad , \quad X_2 = (1, 0, 2) \quad , \quad X_3 = (1, 1, 0)$$

لدراسة ما إذا كانت S ولدت $\mathbb{R}^3$ أم لا نختار أي متجه في الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ وليكن $X = (a, b, c)$ حيث a, b, c أعـداد حقيقية والتأكد مـن وجـود القيم c_1, c_2, c_3 بحيث إن

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 = X$$

$$c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 2) + c_3(1, 1, 0) = (a, b, c)$$

$$(c_1 + c_2 + c_3, c_1 + c_3, 2c_1 + 2c_2) = (a, b, c)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على نظام المعادلات التالية

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= a \\ c_1 \qquad + c_3 &= b \\ 2c_1 + 2c_2 \qquad &= c \end{aligned}$$

الحل هو

$$c_1 = \frac{-2a + 2b + c}{2} \quad , \quad c_2 = a - b \quad , \quad c_3 = \frac{2a - c}{2}$$

إذن $\{X_1, X_2, X_3\}$ تولد $\mathbb{R}^3$

مثال (٥ ـ ١٤) :

بفرض الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ والمجموعة $S = \{X_1 , X_2\}$ حيث

$$X_1 = (1, 2, 1) \ , \ X_2 = (1, 0, 2)$$

لدراسة ما إذا كانت S ولدت $\mathbb{R}^3$ أم لا نختار أي متجه في $\mathbb{R}^3$ وليكن $X = (a, b, c)$ حيث إن $a, b, c \in \mathbb{R}$ والتأكد من وجود قيم c_1 , c_2 بحيث إن

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = X$$

$$c_1 (1, 2, 1) + c_2 (1, 0, 2) = (a, b, c)$$

$$(c_1 + c_2 , 2c_1 , c_1 + 2c_2) = (a, b, c)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على مجموعة المعادلات التالية

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ 2c_1 \quad &= b \\ c_1 + 2c_2 &= c \end{aligned}$$

وبمحاولة إيجاد حل لهذه المجموعة نكون المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right]$$

وبإجراء عمليات الحذف نحصل على المصفوفة

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2a - c \\ 0 & 1 & c - a \\ 0 & 0 & b - 4a + 2c \end{array}\right]$$

الحل يتحقق فقط عندما $b - 4a + 2c = 0$ وحيث إننا نحتاج حلاً لأي قيم اختيارية a, b, c وعليه فإن S لا تولد $\mathbb{R}^3$.

تعريـــف :

نفرض لدينا المصفوفة A من النوع $m \times n$ على المجال $\mathbb{K}$ فإنه يمكن اعتبار صفوف هذه المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$R_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, R_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

على أنها متجهات في $\mathbb{K}^n$ فإنها تولد فضاءاً جزئياً من $\mathbb{K}^n$ يسمى بالفضاء الصفي للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $\mathscr{L}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$

وبالمثل يمكن اعتبار مجموعة أعمدة هذه المصفوفة

$$C_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, C_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$$

على أنها متجهات في $\mathbb{K}^m$ فإنها تولد فضاءاً جزئياً من $\mathbb{K}^m$ يسمى فضاء الأعمدة للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $\mathscr{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$

تعريـــف :

يقال إن المصفوفة **A** متكافئة صفياً لمصفوفة **B** إذا أمكن الحصول على B من A ببعض العمليات الصفية البسيطة التالية :

(١) تبادل الصفين i , j : $R_i \leftrightarrow R_j$

(٢) ضرب الصف i بعدد غير صفري α : $\alpha \neq 0$, $R_i \to \alpha R_i$

(٣) استبدال الصف i بمجموع الصف j مضروباً في α والصف i

$$R_i \to \alpha R_j + R_i$$

نظرية (٥ ـ ٤):

المصفوفات المتكافئة صفياً لها فضاء صفي واحد

البرهان:

من التعريف السابق يتضح أنه إذا كانت المصفوفتان A , B متكافئتين فإنه يمكن الحصول على المصفوفة B من المصفوفة A ببعض العمليات الأولية البسيطة على صفوف A . وهذا يعني أن فضاء الصفوف في B هو فضاء جزئي من فضاء الصفوف في A وبالمثل فضاء الصفوف في A هو فضاء جزئي من فضاء الصفوف في B .

أي أنه

$$\mathscr{L}_B (R_1 , R_2 , \ldots , R_m) \subset \mathscr{L}_A (R_1 , R_2 , \ldots , R_m)$$

$$\mathscr{L}_A (R_1 , R_2 , \ldots , R_m) \subset \mathscr{L}_B (R_1 , R_2 , \ldots , R_m)$$

$$\mathscr{L}_A (R_1 , R_2 , \ldots , R_m) = \mathscr{L}_B (R_1 , R_2 , \ldots , R_m)$$

نتيجة :

المصفوفات المختصرة صفياً لها فضاء صفي واحد إذا كان لها نفس الصفوف غير الصفرية .

مثال (٥ ـ ١٥) :

بين أن الفضاء V المولد بالمتجهات

$$X_1 = (1, 2, -1, 3) \quad , \quad X_2 = (2, 4, 1, -2) \quad , \quad X_3 = (3, 6, 3, -7)$$

والفضاء `V المولد بالمتجهين $Y_1 = (1, 2, -4, 11)$, $Y_2 = (2, 4, -5, 14)$

متساويان

نكون المصفوفة A التي صفوفها المتجهات $X_i, 1 \le i \le 3$

أي أن A من النوع 4 x 3 ثم نجري العمليات الصفية البسيطة على هذه المصفوفة .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_2 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{bmatrix} R_3 \to -2R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_2 \to \frac{1}{3} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة B التي صفوفها المتجهات $Y_i \; , \; 1 \le i \le 2$

أي أن B من النوع 4 x 2 ثم نجري العمليات الصفية البسيطة على هذه المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -2R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{1}{3} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \end{bmatrix} \quad R_1 \to 4R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-8}{3} \end{bmatrix}$$

بما أن الصفوف غير الصفرية في المصفوفتين A , B المختصرتين متطابقة فإن الفضاء الصفي لهما متساو . أي أن $V = V'$

طريقة أخرى:

نثبت أن $X_i , \; 1 \le i \le 3$ تركيب خطي مع Y_1 , Y_2 .

ونثبت أن $Y_i , \; 1 \le i \le 2$ تركيب خطي مع X_1 , X_2 , X_3 .

تعريـــف :

إذا كان U , W فضائين جزئيين من الفضاء المتجه V فإن مجموع U + W يعرف بأنه

$$U + W = \{ X + Y \mid X \in U \quad , \quad Y \in W \}$$

نظرية (٥ ـ ٥) :

المجموع $U + W$ للفضائين الجزئيين U , W من فضاء متجه V هو أيضاً فضاء جزئي من الفضاء المتجه V .

البرهان:

بما أن $0 \in W \quad , \quad 0 \in U$

$$0 = 0 + 0 \in U + W$$

بفرض أن $X_2 + Y_2 \in U + W \quad , \quad X_1 + Y_1 \in U + W$

حيث $Y_1 , Y_2 \in W \quad , \quad X_1 , X_2 \in U$

فإن $(X_1 + Y_1) + (X_2 + Y_2) = (X_1 + X_2) + (Y_1 + Y_2) \in U + W$

أيضاً $\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y \in U + W$

لأي عدد α

إذن $U + W$ هو فضاء جزئي من الفضاء المتجه V .

مثال (٥ ـ ١٦) :

إذا كان V هو فضاء جميع المصفوفات المربعة 2×2 على المجال $\mathbb{R}$ وكان U , W فضائين جزئيين من V بحيث

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 , x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1 , y_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

يلاحظ أن

$$U + W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; x_1 , x_2 , y_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

إذن كل من $U \cap W$, $U + W$ فضاءات جزئية من V .

تعريـــف :

يعرف الفضاء المتجه بأنه **مجموع مباشر لفضائية الجزئين** U , W ويرمز له بالرمز $V = U \oplus W$ إذا كان كل متجه $Z \in V$ يمكن أن يكتب بصورة واحدة وواحدة فقط $Z = X + Y$ حيث $Y \in W$, $X \in U$.

نظرية (٥ ـ ٦) :

يكون الفضاء المتجه V مجموعاً مباشراً لفضائية الجزئيين U , W إذا - وفقط إذا - كان :

(i) $V = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$

البرهان:

أولاً : نفرض أن $V = U \oplus W$

إذن أي متجه $Z \in V$ يكتب بصورة وحيدة $Z = X + Y$

حيث $Y \in W$, $X \in U$

إذن $V = U + W$

نفرض أن هناك عنصراً $Z \in U \cap W$ نجد أن

(١) $Z = Z + 0$ حيث $0 \in W$, $Z \in U$

(٢) $Z = 0 + Z$ حيث $Z \in W$, $0 \in U$

وبما أن هذا المجموع لا بد وأن يكون وحيداً فإن $Z = 0$

إذن $\quad U \cap W = \{0\}$

ثانياً : نفرض العكس أن $V = U + W \quad , \quad U \cap W = \{0\}$

ونحاول إثبات أن $V = U \oplus W$

نفرض أن $Z \in V$ وبما أن $V = U+W$ فإنه يوجد $X \in U \; , \; Y \in W$

بحيث إن $Z = X + Y$ وعلينا إثبات أن هذا المجموع وحيد لذلك نفرض

$Z = X` + Y`$ حيث $Y` \in W$ ، $X` \in U$

$$Z = X + Y = X` + Y`$$

$$X - X` = Y` - Y$$

ولكن $\quad Y` - Y \in W \quad , \quad X - X` \in U$

وبما أن $\quad U \cap W = \{0\}$

$$Y` - Y = 0 \quad , \quad X - X` = 0$$

$$Y = Y` \quad , \quad X = X`$$

وبذلك يكون المجموع $X + Y$ لعنصر ما $Z \in V$ وحيداً

$$V = U \oplus W$$

مثال (٥ ـ ١٧) :

نفرض الفضاء المتجه $V = \mathbb{R}^3$ وأن الفضاء الجزئي U هو المستوى X Y والفضاء الجزئي W هو المستوى Y Z

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 = U + W = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

مع ملاحظة أنه ليس مجموعاً مباشراً حيث

$$(2, 3, 6) = (2, 1, 0) + (0, 2, 6)$$
$$= (2, -2, 0) + (0, 5, 6)$$

مثال (٥ ـ ١٨) :

نفرض أن الفضاء المتجه $V = \mathbb{R}^3$ وأن الفضاء الجزئي U هو المستوى X Y والفضاء الجزئي W هو المحور Z

$$U = \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$W = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

يلاحظ أنه أي متجه $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ هو عبارة عن مجموع متجه في U مع متجه في W بطريقة واحدة وواحدة فقط

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$$

وبالتالي فإن $\mathbb{R}^3$ هو مجموع مباشر لكل من W , U

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

تمـــاريـــن (٥)

١ - أي مجموعة جزئية من المجموعات الجزئية التالية تكون فضاء جزئي متجه من الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$

(i) $W = \{(a, b, 2) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

(ii) $W = \{(a, b, c) \mid c = a + b \quad ; \quad a, b, \alpha \in \mathbb{R}\}$

(iii) $W = \{(a, b, 0) \mid a = b \quad ; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$

(iv) $W = \{(a, b, c) \mid a = c = 0 \quad ; \quad b \in \mathbb{R}\}$

٢ - بفرض أي متجهين $X = (1, 2, -3)$, $Y = (-2, 3, 0) \in \mathbb{R}^3$
أثبت أن المجموعة الجزئية W من $\mathbb{R}^3$ تكون فضاء جزئي متجه من $\mathbb{R}^3$

حيث $W = \{a X + b Y \mid X, Y \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$

٣ - أي من المجموعات الجزئية التالية من الفضاء المتجه M_{23} تكون فضاء جزئي متجه من M_{23}

(i) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid b = a + c \; ; \; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$

(ii) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(iii) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \mid a = -2c \,,\, f = 2e + d ; \; a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\}$

٤ - أي من المتجهات التالية يكون تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات .

$\{ X_1 = (4, 2, -3) \ , \ X_2 = (2, 1, -2) \ , \ X_3 = (-2, -1, 0) \}$?

(i) (1, 1, 1) (ii) (4, 2, – 6)

(iii) (– 2, –1, 1) (iv) (–1, 2, 3)

٥ - أي من المتجهات التالية يكون تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات

$\{ X_1 = (1, 2, 1, 0) \ , \ X_2 = (4, 1, -2, 3) \ , \ X_3 = (1, 2, 6, -5) \ ,$

$X_4 = (-2, 3, -1, 2) \}$?

(i) (3, 6, 3, 0) (ii) (1, 0, 0, 0)

(iii) (3, 6, – 2, 5) (iv) (0, 0, 0,1)

٦ - أي من مجموعات المتجهات التالية تولد $\mathbb{R}^2$ ؟

(i) {(1,2) , (–1, 1)} (ii) {(0, 0) , (1, 1) , (–2, –2)}

(iii) {(1,3) , (2, –3) , (0,2)} (iv) {(2, 4) , (–1, 2)}

٧ - أي من مجموعات المتجهات التالية تولد $\mathbb{R}^3$ ؟

(i) {(1, –1, 2) , (0, 1, 1)}

(ii) {(1, 2, –1) , (6, 3, 0) , (4, –1, 2) , (–3, –2, 1)}

(iii) {(2, 2, 3) , (–1, –2, 1) , (0, 1, 0)}

(iv) {(1, 0, 0) , (0, 1, 0) , (0, 0, 1) , (1, 1, 1)}

٨ - أي من مجموعات المتجهات التالية تولد $\mathbb{R}^4$ ؟

(i) {(1, 0, 0, 1) , (0, 1, 0, 0) , (1, 1, 1, 1) , (1, 1, 1, 0)}

(ii) {(1, 2, 1, 0) , (1, 1, –1, 0) , (0, 0, 0, 1)}

(iii) {(6, 4, –2, 4) , (2, 0, 0, 1) , (3, 2, –1, 2) , (5, 6, –3, 2) , (0,4,–2,–1)}

(iv) {(1, 1, 0, 0) , (1, 2, –1, 1) , (0, 0, 1, 1) , (2, 1, 2, 1)}.

٩ - اكتب المتجه $X = (1, -2, 5)$ على صورة تركيب خطي مع مجموعة المتجهات

$$\{X_1 (1, 1, 1)\ ,\ X_2 = (1, 2, 3)\ ,\ X_3 = (2, -1, 1)\}$$

١٠- ما قيمة α ليكون المتجه $X = (1, -2, \alpha)$ تركيباً خطياً مع المتجهين

$$Y = (2, -1, -5)\quad ,\quad Z = (3, 0, -2)$$

١١- اكتب المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ على صورة تركيب خطي مع مجموعة المصفوفات

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

١٢- بيِّن أن المتجهات $Z = (0, 0, 1)$, $Y = (0, 1, 2)$, $X = (1, 2, 3)$ تولد الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$.

١٣- حدد ما إذا كانت المصفوفات التالية لها نفس الفضاء الصفي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

١٤- حدد ما إذا كانت المصفوفتان التاليتان لهما نفس الفضاء العمودي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

الباب السادس

الأســـاس والبعـــد

BASIS & DIMENSION

الباب السادس

الأســـاس والـبـعــــد

Basis and Dimension

تعريـــف :

تعــرف المنظومــة المـرتبة مـــن n من الأعـداد $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ بمـتجـه ذو n بعـداً . وتـسـمى الأعـداد $x_i, 1 \le i \le n$ بمـركـبات الـمتـجـه X ويتساوى المتجهـان $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ إذا – وفقط إذا – كان $x_i = y_i$, $1 \le i \le n$

تعريـــف :

يعرف المتجه Y من الفضاء الاتجاهي ذو n بعداً أنه متناسب مع المتجه X إذا أمكن إيجاد عدد ما α بحيث $Y = \alpha X$ وكحالة خاصة فإن المتجه الصفري 0 يتناسب مع أي متجه آخر X حيث $0 = 0\,X$.

وإذا كـان $Y = \alpha X$, $Y \neq 0$ فإن $\alpha \neq 0$ وبالتـالي $X = \alpha^{-1} Y$ أي أنه لأي متجهين غير صفريين وكان X يتناسب مع Y فإن Y يتناسب مع X .

تعريـــف :

نفرض V فضاءاً متجهاً على المجال $\mathbb{K}$ فإن المتجهات $X_1, X_2, \dots, X_n \in V$ تكون مـرتبطة خطياً على $\mathbb{K}$ إذا وجـدت الأعـداد $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ ليـست جميعها أصفاراً بحيث $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n = 0$

كما تعرف المجموعة بأنها مستقلة خطياً إذا كانت العلاقة

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n = 0$$

تستلزم أن يكون $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_n = 0$

مثال (٦ ـ ١) :

ادرس ما إذا كانت المتجهات

$$X = (1, -1, 0) \ , \ Y = (1, 3, -1) \ , \ Z = (5, 3, -2)$$

مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^3$ أم لا

نفرض أنه يوجد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ بحيث إن

$$\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = 0$$

$$\alpha_1 (1, -1, 0) + \alpha_2 (1, 3, -1) + \alpha_3 (5, 3, -2) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 , -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 , -\alpha_2 - 2\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

بمساواة المركبات المتناظرة في كل من الطرفين نحصل على نظام المعادلات المتجانسة

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

وباستخدام طريقة الحذف المتتالي

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} R_2 \to R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} R_2 \to \frac{1}{4} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} R_3 \to R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نحصل على نظام المعادلات $\alpha_1 + \alpha_2 + 5\,\alpha_3 = 0$

$\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = 0$

وبما أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل

فيوجد هناك عدد لا نهائي من الحلول (أي لا يوجد الحل الصفري)

من المعادلة الثانية $\alpha_2 = -2\,\alpha_3$

بفرض $\alpha_3 = -1 \rightarrow \alpha_2 = 2$

من المعادلة الأولى $\alpha_1 = 3$

إذن المتجهات الثلاثة مرتبطة خطياً حيث $3X + 2Y - Z = 0$

مثال (٦ ـ ٢) :

ادرس ما إذا كانت المتجهات

$$X_1 = (1, -2, 1) \;,\; X_2 = (2, 1, -1) \;,\; X_3 = (7, -4, 1)$$

مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^3$ أم لا

نكون تركيباً خطياً للمتجهات الثلاثة X_1, X_2, X_3 مساوياً المتجه الصفري باستخدام الأعداد α, β, γ .

$$\alpha\,(1, -2, 1) + \beta\,(2, 1, -1) + \gamma\,(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha + 2\beta + 7\gamma \;,\; -2\alpha + \beta - 4\gamma \;,\; \alpha - \beta + \gamma) = (0, 0, 0)$$

وبمساواة المركبات المتناظرة في كل من الطرفين نحصل على نظام المعادلات المتجانسة

$$\alpha+2\beta+7\gamma=0$$
$$-2\alpha+\beta-4\gamma=0$$
$$\alpha-\beta+\gamma=0$$

وباستخدام طريقة الحذف المتتالي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to 2R_1+R_2 \\ R_3 \to -R_1+R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{1}{5}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 3R_2+R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإننا نحصل على معادلتين غير صفريتين في ثلاثة مجاهيل

$$\alpha+2\beta+7\gamma=0$$
$$\beta+2\gamma=0$$

ولذلك فإنه يوجد حل غير الحل الصفري لهذه المجموعة المتجانسة . أي يوجد هناك عدد لا نهائي من الحلول

من المعادلة الثانية $\beta = -2\gamma$ بفرض $\gamma = 1$

إذن أحد هذه الحلول هو $(-3, -2, 1)$

إذن المتجهات الثلاثة مرتبطة خطياً حيث

$$-3X_1 - 2X_2 + X_3 = 0$$

مثال (٦ ـ ٣) :

أثبت أن المتجهات

$$X = (6, 2, 3, 4) \quad , \quad Y = (0, 5, -3, 1) \quad , \quad Z = (0, 0, 7, -2)$$

مستقلة خطياً

نكون تركيباً خطياً للمتجهات الثلاثة مساوياً للمتجه الصفري باستخدام الأعداد α, β, γ

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$$

$$\alpha(6, 2, 3, 4) + \beta(0, 5, -3, 1) + \gamma(0, 0, 7, -2) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(6\alpha, 2\alpha + 5\beta, 3\alpha - 3\beta + 7\gamma, 4\alpha + \beta - 2\gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

بمساواة المركبات المتناظرة في كل من الطرفين نحصل على نظام المعادلات المتجانسة

$$\begin{aligned} 6\alpha &= 0 \\ 2\alpha + 5\beta &= 0 \\ 3\alpha - 3\beta + 7\gamma &= 0 \\ 4\alpha + \beta - 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

من المعادلة الأولى $\alpha = 0$ وبالتعويض في الثانية $\beta = 0$ وبالتعويض في الثالثة $\gamma = 0$ وعلى ذلك فإنه لا يمكن أن يكون $\alpha X + \beta Y + \gamma Z = 0$ إلا إذا كانت $\alpha = \beta = \gamma = 0$ وبالتالي فإن المتجهات الثلاثة X, Y, Z مستقلة خطياً .

مثال (٦ ـ ٤) :

نفرض المتجهات $E_3 = (0, 0, 1)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_1 = (1, 0, 0)$

من $\mathbb{R}^3$ نجد أن

$$\alpha_1 . E_1 + \alpha_2 . E_2 + \alpha_3 . E_3 = 0$$

$$\alpha_1 (1, 0, 0) + \alpha_2 (0, 1, 0) + \alpha_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

إذن $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

إذن المتجهات الثلاثة مستقلة خطياً وبالمثل يمكن إثبات أن المتجهات

$$E_1 = (1,0, \dots , 0) \quad , \quad E_2 = (0,1, \dots , 0) , \dots , E_n = (0, 0, \dots , 1)$$

تكون مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^n$.

نظرية (٦ ـ ١) :

مجموعة المتجهات $\{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ مرتبطة خطياً إذا – وفقط إذا – كان إحداها تركيباً خطياً مع المتجهات الأخرى .

البرهان:

نفرض أن المتجه X_i تركيب خطي مع المتجهات الأخرى . أي أن

$$X_i = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{i-1} X_{i-1} + \alpha_{i+1} X_{i+1} + \dots + \alpha_n X_n$$

بإضافة $-X_i$ إلى كل من الطرفين نحصل على

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{i-1} X_{i-1} - X_i + \alpha_{i+1} X_{i+1} + \dots + \alpha_n X_n = X_i - X_i$$

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{i-1} X_{i-1} +(-1) X_i + \alpha_{i+1} X_{i+1} + \dots + \alpha_n X_n = 0$$

وحيث إن معامل X_i لا يساوي الصفر إذن يوجد على الأقل معامل لا يساوي الصفر وبالتالي فإن مجموعة المتجهات مرتبطة خطياً .

وبالعكس نفرض أن المتجهات مرتبطة خطياً أي أن

$$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_j X_j + \dots + \beta_n X_n = 0$$

ويوجد على الأقل معامل لا يساوي الصفر $\beta_j \neq 0$

$$\beta_j X_j = -\beta_1 X_1 - \beta_2 X_2 - \dots - \beta_{j-1} X_{j-1} - \beta_{j+1} X_{j+1} - \dots - \beta_n X_n$$

$$X_j = -\beta^{-1}_j \beta_1 X_1 - \beta^{-1}_j \beta_2 X_2 - \dots - \beta^{-1}_j \beta_{j-1} X_{j-1} - \beta^{-1}_j \beta_{j+1} X_{j+1} - \dots - \beta^{-1}_j \beta_n X_n$$

وبالتالي فإن X_j تركيب خطي مع المتجهات الأخرى .

نتيجة:

بالمثل يمكن إثبات أيضاً أن مجموعة المتجهات $\{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ غير الصفرية تكون مرتبطة خطياً إذا – وفقط إذا – كان إحداها تركيباً خطياً مع المتجهات السابقة

ملاحظات هامة

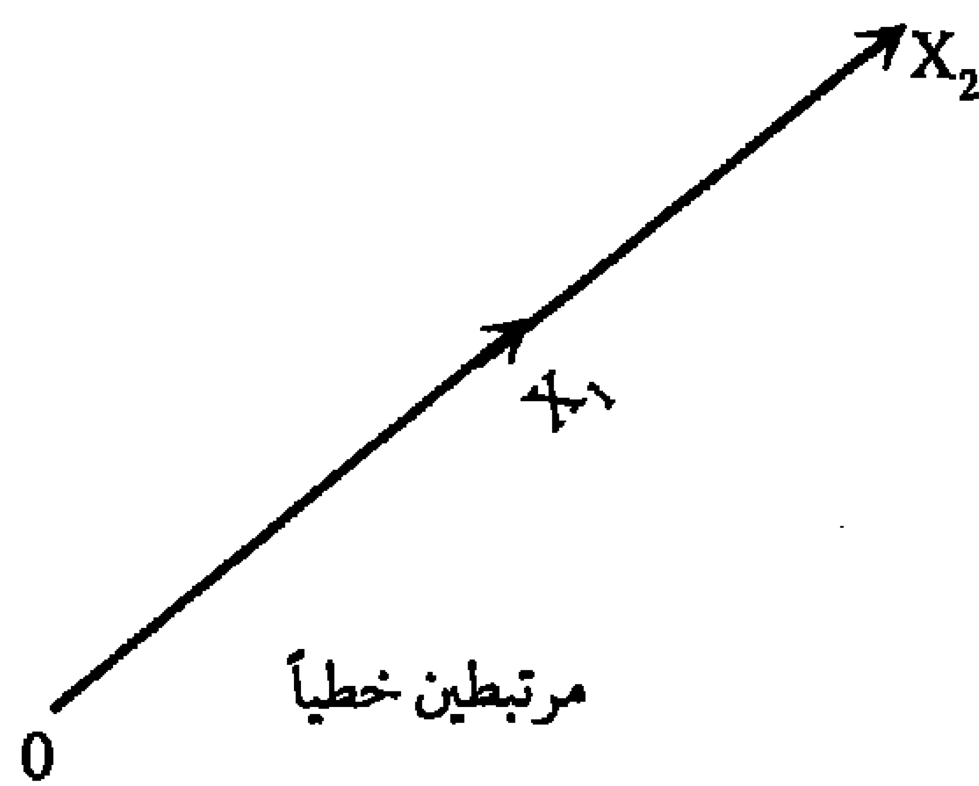
١ – مجموعة المتجهات $S = \{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ مرتبطة أو مستقلة خطياً إذا كانت المتجهات $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ مرتبطة أو مستقلة خطياً .

٢ – إذا كان اثنان من المتجهات $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ متساويان وليكن X_1 , X_2 أي أن $X_1 = X_2$ فإن المتجهات تكون مرتبطة خطياً لأن

$$X_1 - X_2 + 0\,X_3 + \dots + 0\,X_n = 0$$

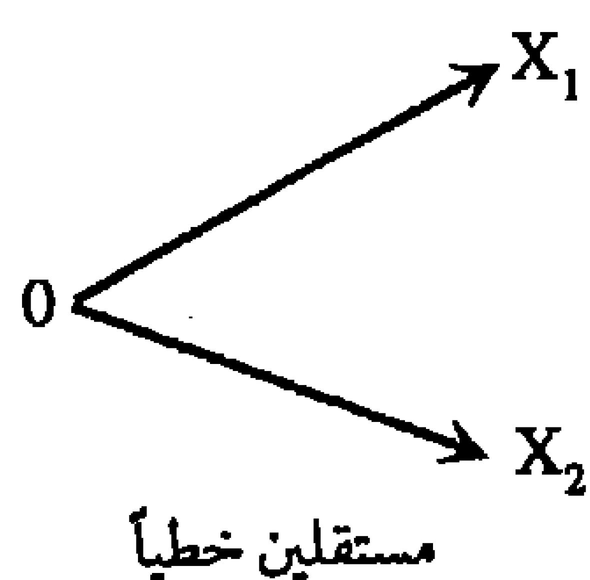
٣ – لدراسة معنى الارتباط الخطي في $\mathbb{R}^2$.

نفرض أن المجموعة $\{X_1 , X_2\}$ مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^2$ إذاً توجد أعداد قياسية α_1 , α_2 ليس جميعهم أصفار بحيث إن $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = 0$



بفرض أن $\alpha_1 \neq 0$

إذن $X_1 = -(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})\ X_2$



بفرض أن $\alpha_2 \neq 0$

إذن $X_2 = -(\frac{\alpha_1}{\alpha_2})\ X_1$

أي أن إحداهما يكون مضاعف الآخر .

وبالعكس نفرض أن أحدهما مضاعف الآخر

$$X_1 = \alpha X_2$$
$$1\,X_1 - \alpha X_2 = 0$$

وحيث إنه يوجد معامل واحد على الأقل لا يساوي الصفر (معامل X_1)
إذن X_1 , X_2 مرتبطين خطياً .
إذن أي متجهين في $\mathbb{R}^2$ مرتبطين خطياً إذا - وفقط إذا - كان أحدهما مضاعف الآخر (أي أنهما يقعان على مستقيم واحد مار بنقطة الأصل) .

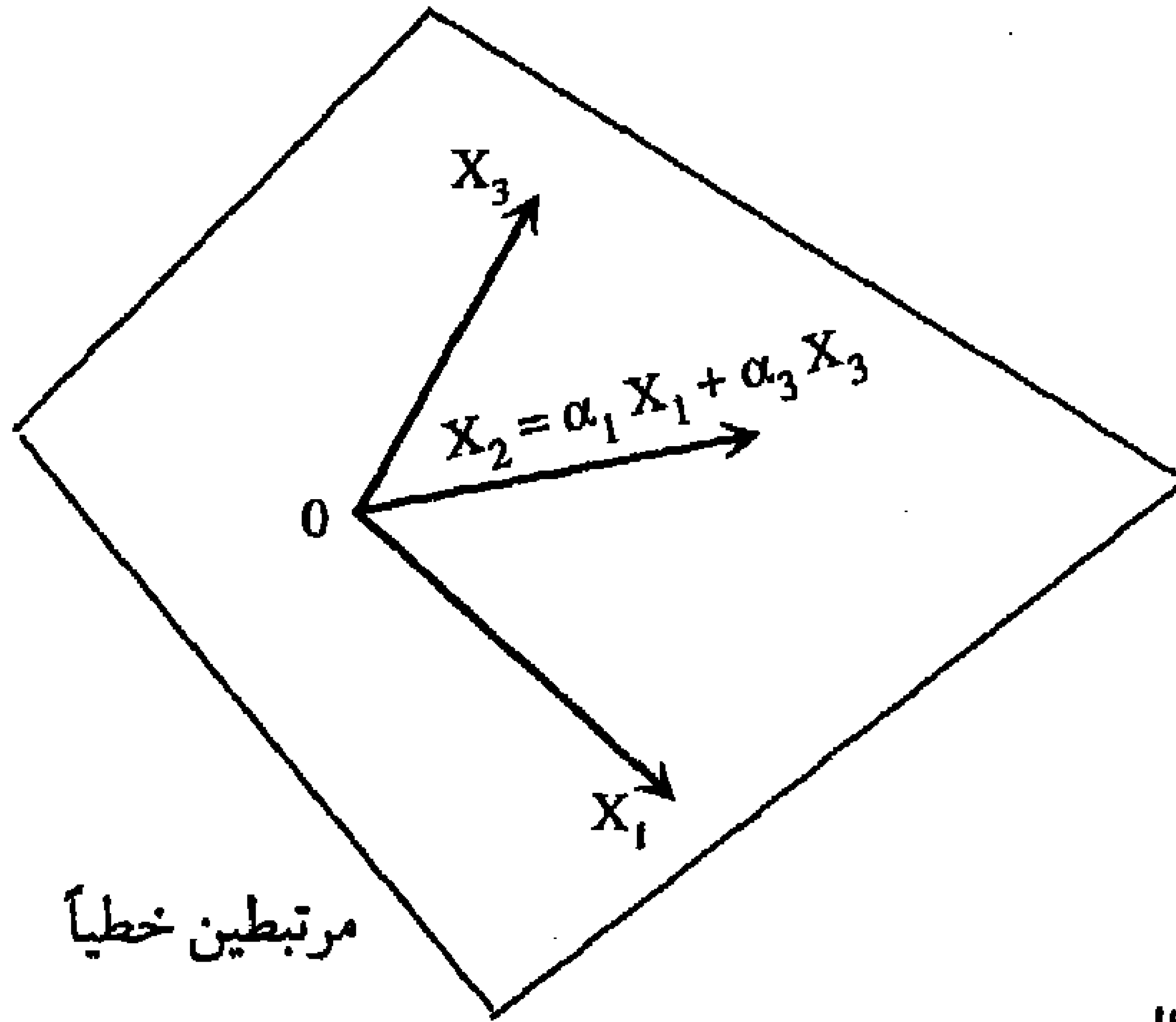
٤ - لدراسة معنى الارتباط الخطي في $\mathbb{R}^3$.

نفرض أن المجموعة $\{X_1 , X_2, X_3\}$ مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^3$

إذن $\alpha_1 X_1 + \alpha_1 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$

بحيث إن $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ ليست جميعاً أصفاراً وليكن $\alpha_2 \neq 0$

$$X_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} X_1 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} X_3$$



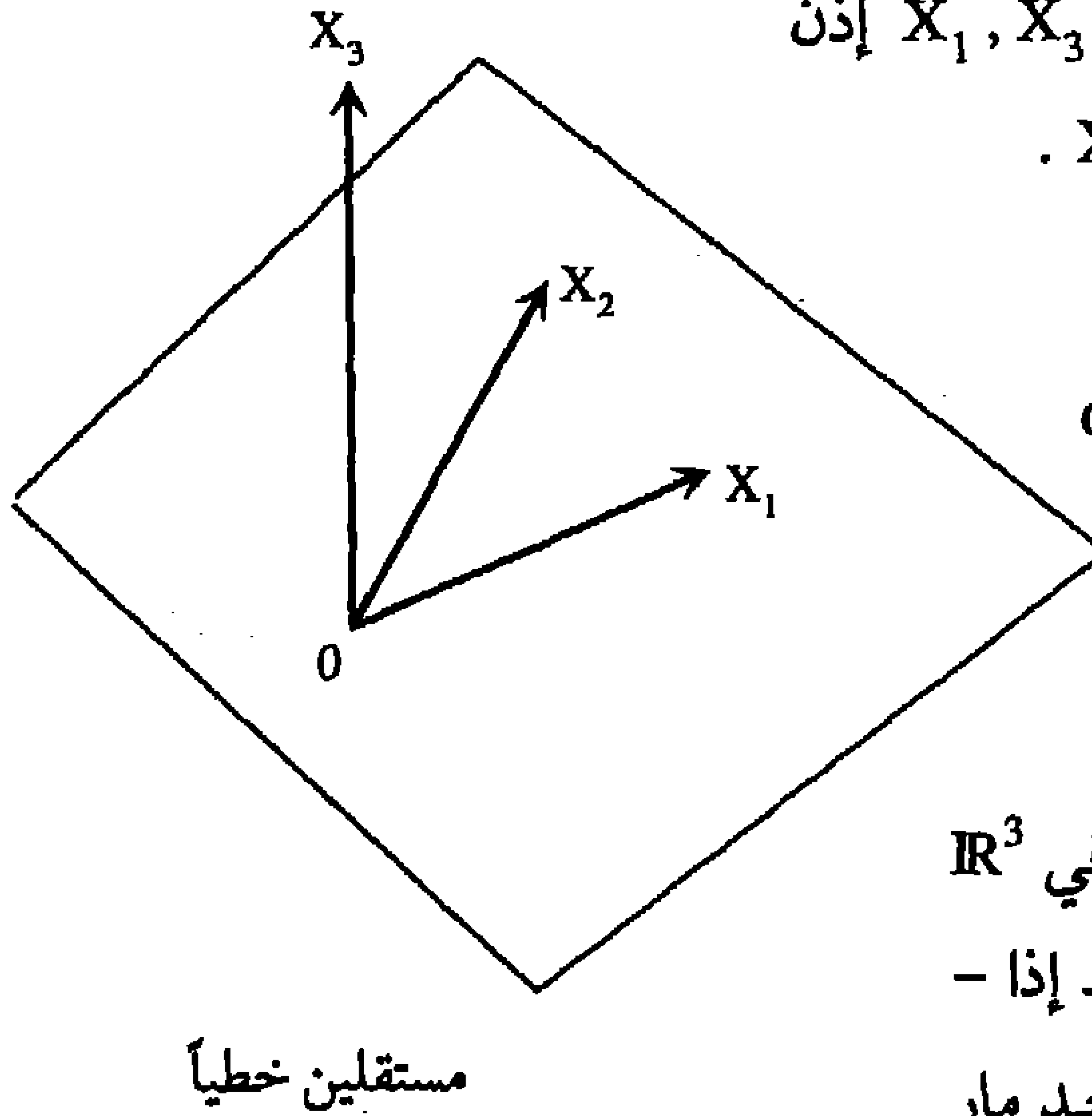
مرتبطين خطياً

وهذا يعني أن X_2 في الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ ولد بواسطة X_1 , X_3 . الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^3$ والذي ولد بالمتجهين X_1 , X_3 يكون المستوى المار بنقطة الأصل محسوباً بواسطة X_1 , X_3 .

بالعكس افرض أن X_2 ماراً بالمستوى من نقطة الأصل المحسوب بواسطة X_1 , X_3 إذن X_2 يكون تركيباً خطياً مع X_1 , X_3 .

$$X_2 = \alpha_1 X_1 + \alpha_3 X_3$$

$$\alpha_1 X_1 + (-1) X_2 + \alpha_3 X_3 = 0$$



مستقلين خطياً

وهذا يعني أن $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ مرتبطة خطياً .

إذن أي ثلاثة متجهات في $\mathbb{R}^3$ تكون مرتبطة خطياً إذا - وفقط إذا - كانت جميعاً تقع في مستوى واحد مار بنقطة الأصل .

٥ - كل مجموعة تحوي مجموعة جزئية مرتبطة هي نفسها مرتبطة ، وبالتالي أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة تكون مستقلة .

٦ - المجموعة الناشئة من تبديل عناصر مجموعة مستقلة $\{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ تكون مستقلة أيضاً .

تعريـــف :

يعـرف الفـضـاء المتـجـه V أنه ذو بعـد n ويكتب $\dim V = n$ إذا وجـدت مجموعة متجهات مستقلة خطياً عددها n $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ تولد الفضاء V كما تسمى $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ **أساساً للفضاء** V .

مثال (٦ ـ ٥) :

المتجهات $E_1 = (1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$ تكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^2$ والمتجهات $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$ تكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$ ، وهكذا المتجهات

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0)\ ,\ E_2 = (0, 1, \dots, 0)\ , \dots ,\ E_n = (0, 0, \dots, 1)$$

تكون أساساً ويسمى الأساس E_i **بالأساس المعتاد** للفضاء المتجه $\mathbb{R}^n$.

مثال (٦ ـ ٦) :

بين أن مجموعة المتجهات $S = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ حيث

$$X_1 = (1, 0, 1, 0) \quad , \quad X_2 = (0, 1, -1, 2)$$
$$X_3 = (0, 2, 2, 1) \quad , \quad X_4 = (1, 0, 0, 1)$$

تكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^4$.

نحاول أولاً إثبات أن S مستقلة خطياً . نكون المعادلة الاتجاهية

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0$$

$$\alpha_1 (1, 0, 1, 0) + \alpha_2 (0, 1, -1, 2) + \alpha_3 (0, 2, 2, 1) + \alpha_4 (1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

بمساواة المركبات المتناظرة في كل الطرفين

$$\begin{aligned} \alpha_1 \qquad\qquad + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_2 + 2\,\alpha_3 \qquad &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\,\alpha_3 \qquad &= 0 \\ 2\,\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

مجموعة هذه المعادلات لها حل وحيد هو الحل الصفري

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

إذن المجموعة S مستقلة خطياً

لإثبات أن هذه المجموعة S تولد $\mathbb{R}^4$ نفرض $X = (a, b, c, d)$ أي متجه في $\mathbb{R}^4$. نكون المعادلة الاتجاهية

$$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = X$$

$$\beta_1\,(1,0,1,0) + \beta_2\,(0,1,-1,2) + \beta_3\,(0,2,2,1) + \beta_4\,(1,0,0,1) = (a, b, c, d)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \qquad\qquad + \beta_4 &= a \\ \beta_2 + 2\,\beta_3 \qquad &= b \\ \beta_1 - \beta_2 + 2\,\beta_3 \qquad &= c \\ 2\,\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 &= d \end{aligned}$$

بحل هذا النظام من المعادلات نجد أن هناك حلاً للقيم $\beta_1 , \beta_2 , \beta_3 , \beta_4$ وعليه فإن S تولد الفضاء $\mathbb{R}^4$. وتكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^4$.

نظرية (٦ ـ ٢) :

إذا كانت المجموعة $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ تكون أساساً للفضاء الاتجاهي V . إذن أي متجه في V يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط كتركيب خطي مع متجهات المجموعة S .

البرهان :

أولاً : أي متجه X في V يمكن كتابته كتركيب خطي مع متجهات المجموعة S حيث إن S تولد V .

نفرض أن X يمكن أن يكتب بطريقتين

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$$

$$X = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_n X_n$$

بالطرح $(\alpha_1 - \beta_1) X_1 + (\alpha_2 - \beta_2) X_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) X_n = 0$

وحيث إن S مجموعة مستقلة إذن $1 \le i \le n \quad , \quad (\alpha_i - \beta_i) = 0$

ولذلك $1 \le i \le n \quad , \quad \alpha_i = \beta_i$.

أي أن المتجه X يكتب بطريقة واحدة وواحدة فقط .

مثال (٦ ـ ٧) :

ليكن V الفضاء المتجه المكون من كل المصفوفات من النوع 2 x 3 على المجال $\mathbb{K}$. عندئذ تكون المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أساساً للفضاء V وعليه فإن $dim\, V = 6$

وبوجه عام ليكن V هو الفضاء المتجه المكون من جميع المصفوفات من النوع $m \times n$ على المجال $\mathbb{K}$. ولنفرض $E_{ij} \in V$ المصفوفة التي عنصرها في الموضع (ij) يساوي 1 وجميع العناصر الأخرى أصفاراً . عندئذ تكون المجموعة $\{E_{ij}\}$ أساساً للفضاء V وبالتالي فإن $dim\ V = mn$

نظرية (٦ ـ ٣) :

إذا كان W فضاءاً جزئياً من الفضاء المتجه V الذي بعده n .
إذن $dim\ W \leq n$ وإذا كان $dim\ W = n$ فإن $W = V$

البرهان :

بما أن $dim\ V = n$

وأن أساس W مكون من مجموعة متجهات مستقلة خطياً فلا يمكن أن تحتوي أكثر من n عنصر وبالتالي فإن $dim\ W \leq n$.

وإذا كانت $\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$ أساساً للفضاء W فلا بد أن يكون أساساً للفضاء V أيضاً إذ إنها مجموعة مستقلة عدد عناصرها n . لذلك فإن $W = V$ عندما $dim\ W = n$.

مثال (٦ ـ ٨) :

بفرض W فضاءاً جزئياً من الفضاء الحقيقي $\mathbb{R}^3$ وحيث إن $dim\ \mathbb{R}^3 = 3$ فإنه بتطبيق النظرية السابقة يكون بعد W إحدى الحالات التالية :

(١) $dim\ W = 0$ عندئذ $W = \{0\}$ أي نقطة .

(٢) $dim\ W = 1$ عندئذ W مستقيم يمر بنقطة الأصل .

(٣) $dim\ W = 2$ عندئذ W مستوى يمر بنقطة الأصل .

(٤) $dim\ W = 3$ في هذه الحالة فإن $W = \mathbb{R}^3$.

نتيجة :

إذا كان U , W فضائين جزئيين كل منهما ذو بعد نهائي من فضاء متجه V فيكون عندئذ $U + W$ ذا بعد نهائي وأن

$$dim\,(U + W) = dim\,U + dim\,W - dim\,(U \cap W)$$

مثال (٦ ـ ٩) :

نفرض U المستوى XY, W المستوى YZ فضاءات جزئية على الترتيب من الفضاء $\mathbb{R}^3$.

أي أن $U = \{ (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

$$W = \{ (0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$$

بما أن $\mathbb{R}^3 = U + W$

إذن $dim\,(U + W) = 3$

$$dim\,U = 2 \quad , \quad dim\,W = 2$$

من النتيجة السابقة

$$3 = 2 + 2 - dim\,(U \cap W)$$

$$dim\,(U \cap W) = 1$$

وهذا يتفق مع كون $U \cap W$ هو المحور Y أي أن

$$U \cap W = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

وبالتالي فإن بعده يساوي 1 .

رتبة المصفوفة

نفرض لدينا المصفوفة A من النوع $m \times n$ على المجال $\mathbb{K}$ وقد سبق تعريف الفضاء الصفي لها $\mathscr{L}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$ بأنه هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{K}^n$ المتولد

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بصفوفها . وإن **الفضاء العمودي لها** $\mathscr{L}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ بأنه هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{K}^m$ المتولد بأعمدتها ، يسمى **بُعد الفضاء الصفي وبُعد الفضاء العمودي للمصفوفة A بالرتبة الصفية والرتبة العمودية على الترتيب .**

نظرية (٦ ـ ٤) :

العمليات الصفية البسيطة لا تغير الفضاء الصفي للمصفوفة .

البرهان :

افرض أن B تنتج من A بإجراء عمليات بسيطة على صفوف A . وإذا فرضنا أن صفوف المصفوفة A هي $R_1, R_2, \ldots, R_m$ سنحاول إثبات أن أي متجه في فضاء صفوف B يكون أيضاً في فضاء صفوف A وبالعكس أي متجه في فضاء صفوف A يكون في فضاء صفوف B وفي هذه الحالة يكون A , B لهما نفس فضاء الصفوف .

نفرض الحالات التالية :

(١) إذا كانت العملية هي إبدال صفين فإن A , B يكون لهما نفس متجهات الصفوف ومن ثم نفس الفضاء الصفي .

(٢) إذا كانت العملية هي ضرب الصف في عدد قياسي أو جمع مضاعفات صف إلى صف آخر فإن متجهات الصفوف $R`_1 , R`_2 , \dots R`_m$ للمصفوفة B تكون تركيباً خطياً من $R_1 , R_2 , \dots R_m$ ولذا تكون في فضاء صفوف A حيث إن الفضاء الصفي مغلق بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية ، فإن جميع التركيبات الخطية من $R`_1 , R`_2 , \dots R`_m$ ستقع أيضاً في فضاء صفوف A . لذا فإن أي متجه في فضاء صفوف B يكون في فضاء صفوف A .

حيث إن B نحصل عليها من A بإجراء عمليات على الصفوف ، فإن A يمكن أن نحصل عليها من B بإجراء العمليات العكسية وعليه فإن فضاء صفوف A محتوى في فضاء صفوف B .

نتيجة :

متجهات الصفوف غير الصفرية في الصورة الصفية المميزة لمصفوفة ما تكون أساساً لفضاء صفوف المصفوفة .

مثال (٦ ـ ١٠) :

أوجد أساساً للفضاء المنشأ من المتجهات

$$X_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad , \quad X_2 = (2, -5, -3, -2, 6)$$
$$X_3 = (0, 5, 15, 10, 0) \quad , \quad X_4 = (2, 6, 18, 8, 6)$$

نكون الفضاء المنشأ من هذه المتجهات وهو فضاء الصفوف للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & 15 & 10 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

بإجـراء العـمليـات البسـيطة على صفـوف هذه المـصـفـوفـة نحـصل على المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

متجهات الصفوف الغير صفرية في هذه المصفوفة هي

$$Y_1 = (1, -2, 0, 0, 3) \quad , \quad Y_2 (0, 1, 3, 2, 0) \quad , \quad Y_3 = (0, 0, 1, 1, 0)$$

هذه المتجـهات تكون أسـاسـاً لفضـاء الصـفـوف . ومن ثم أساسـاً للفـضـاء المنشأ من المتجهات X_1 , X_2 , X_3 , X_4 .

نظرية (٦ ـ ٥) :

الرتبة الصفية والرتبة العمودية للمصفوفة A متساويتان

(بُعد الفضاء الصفي = بُعد الفضاء العمودي)

البرهان :

نفرض المصفوفة $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ من النوع $m \times n$

ومتجهات الصفوف هي $R_1 , R_2 , \ldots , R_m$

نفرض أن فضـاء صفـوف A من بُعد K وأن $S = \{b_1 , b_2 , \ldots , b_k\}$ هي أسـاس لفضـاء الصـفـوف حيث $b_i = \{b_{i1} , b_{i2} , \ldots , b_{in}\}$ ، حيث S أساس

لفضاء الصفوف فإن كل متجه صفوف يمكن التعبير عنه كتركيبة خطية من $b_1, b_2, \dots, b_k$ لذلك

$$R_1 = c_{11} b_1 + c_{12} b_2 + \dots + c_{1k} b_k$$
$$R_2 = c_{21} b_1 + c_{22} b_2 + \dots + c_{2k} b_k$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$R_m = c_{m1} b_1 + c_{m2} b_2 + \dots + c_{2k} b_k$$

بمساواة المركبة j من كل طرف في المعادلة السابقة

$$a_{1j} = c_{11} b_{1j} + c_{12} b_{2j} + \dots + c_{1k} b_{kj}$$
$$a_{2j} = c_{21} b_{1j} + c_{22} b_{2j} + \dots + c_{2k} b_{kj}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{mj} = c_{m1} b_{1j} + c_{m2} b_{2j} + \dots + c_{mk} b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \dots + b_{kj} \begin{bmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \vdots \\ c_{mk} \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر من هذه المعادلة هو متجه العمود j للمصفوفة $A, 1 \le j \le n$. لذلك فإن كل متجه أعمدة للمصفوفة A يقع في الفضاء المنشأ من المتجات k في الطرف الأيمن . لذلك

بُعد فضاء أعمدة $A \le k$ (1)

وحيث إن k = بُعد فضاء صفوف A

إذن بُعد فضاء أعمدة $A \le$ بُعد فضاء صفوف A (2)

حيث إن المصفوفة A اختيارية فإن هذه النتيجة تطبق على A^T

أي أن بُعد فضاء أعمدة $A^T \le$ بُعد فضاء صفوف A^T (3)

ولكنه فضاء أعمدة A^T = فضاء صفوف A
وأيضاً فضاء صفوف A^T = فضاء أعمدة A (4)

إذن من (3)

إذن بُعد فضاء صفوف A $\geq$ بُعد فضاء أعمدة A (5)

من (5) ، (2) نجد أن

بُعد فضاء صفوف A = بُعد فضاء أعمدة A

(الرتبة الصفية للمصفوفة A = الرتبة العمودية للمصفوفة A)

تعريـــف :

يعرف بُعد فضاء الصفوف وبُعد فضاء الأعمدة للمصفوفة A برتبة المصفوفة .

مثال (٦ ـ ١١) :

أوجد أساس فضاء أعمدة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

بتدوير (تحوير) هذه المصفوفة

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

بالاختزال إلى الصورة الصفية المميزة

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لذلك فإن المتجهين $(0, 1, 2)$, $(1, 3, 0)$ يكونان أساساً لفضاء صفوف المصفوفة A^T أو بصورة مكافئة

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

يكونان أساساً لفضاء أعمدة المصفوفة A .

أي أن بُعد فضاء أعمدة المصفوفة $A = 2$.

لإيجاد بُعد فضاء صفوف المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

بإجراء العمليات البسيطة على صفوف المصفوفة A نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث إن متجهات الصفوف غير الصفرية في هذه المصفوفة هي

$(1, 0, 1, 1)$, $(0, 1, 1, -1)$

فإن هذه المتجهات تكون أساس فضاء صفوف هذه المصفوفة ومن ثم فإن بُعد فضاء صفوف المصفوفة $A = 2$.

أي أن رتبـــة المصفـوفـة $A = 2$.

مثال (٦ ـ ١٢) :

أوجد رتبة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

بإجراء العمليات البسيطة على صفوف المصفوفة A نحصل على

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن رتبة هذه المصفوفة = 3 .

نظرية (٦ ـ ٦) :

أعلى رتبة للمحددات المصغرة غير الصفرية في المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة

يترك البرهان كتمرين

لتطبيق نظرية (٦ ـ ٦) لحساب رتبة المصفوفة فإننا نقوم بحساب محددات مصغرة ذات رتب أقل إلى محددات مصغرة ذات رتب أعلى فإذا وجدنا محدداً مصغراً D من الرتبة K لا يساوي الصفر فإنه يجب علينا حساب المحددات المصغرة من الرتبة (K + 1) التي تحيط بالمحدد D فإذا كانت كل هذه المحددات تساوي صفراً فإن رتبة المصفوفة A تساوي K .

مثال (٦ ـ ١٣) :

رتبة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

تساوي 3 لأن

المحدد الثنائي

$$d_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

والمحدد الثلاثي

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

وعند حساب المحددات الرباعية

$$d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (٦ ـ ١٤) :

أوجد مجموعة جزئية قصوى غير مرتبطة خطياً في مجموعة المتجهات

$X_1 = (2, -2, 4)$, $X_2 = (1, 9, 3)$

$X_3 = (-2, -4, 1)$, $X_4 = (3, 7, -1)$

نكون المصفوفة التي أعمدتها عبارة عن المتجهات المعطاة

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \quad , \quad d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -4 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

يتضح من ذلك أن رتبة المصفوفة تساوي 2 وينتج من ذلك أن المتجهين X_1 , X_2 يكونان واحدة من المجموعات الجزئية القصوى غير المرتبطة خطياً في المجموعة المعطاة .

مثال (٦ ـ ١٥) :

نفرض لدينا مجموعة الصور الخطية التالية

$f_1(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$, $f_2(x) = 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4$

$f_3(x) = x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4$, $f_4(x) = 2x_1 + x_2 - x_3$

والمطلوب إيجاد مجموعة جزئية قصوى غير مرتبطة خطياً في هذه المجموعة . يترك كتمرين

(توضيح نكون مصفوفة المعاملات للصور ونكرر نفس المثال السابق) .

تطبيقات على المعادلات الخطية

بفرض لدينا m من المعادلات الخطية في n من المجاهيل على المجال $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (1)$$

يمكن كتابة مجموعة المعادلات (1) على صورة معادلة مصفوفية

$$AX = B \qquad (2)$$

حيث $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ تعرف بمصفوفة المعاملات من النوع $m \times n$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ، تعرف بمصفوفة المجاهيل من النوع $n \times 1$

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ، تعرف بمصفوفة الحدود المطلقة من النوع $m \times 1$

وكما سبق فإن المصفوفة التي على الصورة $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$

تعرف بأنها المصفوفة الموسعة لمجموعة المعادلات الخطية (1)
وسنرمز لها بالرمز (A, B)

نظرية (٦ ـ ٧) (كرونيكل ـ كابيلي) :

يكون لمجموعة المعادلات الخطية A X = B حل إذا – وفقط إذا – كان لمصفوفة المعاملات والمصفوف الموسعة نفس الرتبة .

البرهان:

نفرض أولاً أن مجموعة المعادلات غير متناقضة وأن $r_1 , r_2 , \ldots , r_n$ أحد حلولها . فإذا عوضنا بهذه الأعداد فإنه يمكن أن نلاحظ أن العمود الأخير من المصفوفة الموسعة (A, B) عبارة عن ارتباط خطي في أعمدة المصفوفة A . كذلك أي عمود من أعمدة المصفوفة (A , B) هو في نفس الوقت عمود من أعمدة المصفوفة A ولهذا يمكن التعبير عنه خطياً بدلالة كل أعمدة المصفوفة A .

وبالعكس يكون كل عمود من أعمدة المصفوفة A عبارة عن عمود في المصفوفة (A, B) أي أنه يعبر عنه خطياً بدلالة أعمدة هذه المصفوفة . وينتج من ذلك أن مجموعتي الأعمدة في كل من A ، (A, B) متكافئتان .

وعليه فإن A ، (A, B) لهما نفس الرتبة .

ولإثبات العكس نفرض أن رتبة المصفوفة A تساوي رتبة المصفوفة (A, B) وينتج من ذلك أن أي مجموعة أعمدة في المصفوفة A قصوى غير مرتبطة خطياً تظل قصوى غير مرتبطة خطياً في المصفوفة (A, B) أيضاً . ولهذا يعبر عن عمود الحدود المطلقة في المصفوفة (A, B) بدلالة ارتباط خطي مع باقي الأعمدة وبالتالي بدلالة كل مجموعة أعمدة المصفوفة A .

ولذلك توجد مجموعة معاملات $r_1 , r_2 , \ldots , r_n$ بحيث إن مجموع أعمدة المصفوفة A مأخوذة بهذه المعاملات يساوي عمود الحدود المطلقة . ولهذا تكون المجموعة $r_1 , r_2 , \ldots , r_n$ حلاً للمجموعة أي أن المجموعة غير متناقضة .

طريقة تطبيق النظرية :

نفــرض أن مجموعة المعادلات (1) غير متناقضة وأن رتبة كل من المصفوفة A ، (A, B) تساوي r يعني هذا أن أقصى عدد للصفوف غير المرتبطة خطياً في المصفوفة A يساوي r .

ولذلك فإن أي معادلة ترتيبها يأتي بعد المعادلة r يمكن الحصول عليها كارتباط خطي في الـ r معادلة الأولى أي أن أي حل لـ r معادلة الأولى

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \qquad (3)$$

يحقق (1) وعليه فإنه يكفي إيجاد حل للمجموعة (3) . حيث إن الصفوف المكونة من معاملات المجاهيل في المعادلة (3) غير مرتبطة خطياً (متجهات مستقلة) في فراغ ذي n بُعداً وعددها r صفاً . أي أن رتبة مصفوفة المعاملات تساوي r وعليه تكون $r \leq n$. ولذلك فهناك حالتان :

(١) إذا كانت $r = n$ فإن (3) ستكون مجموعة من المعادلات عددها يساوي عدد المجاهيل ومحدد المعاملات غير صفري وبالتالي يكون للمجموعة (1) حل وحيد يمكن إيجاده باستخدام طريقة كرامر .

(٢) إذا كانت $r < n$ نفرض أن أعمدة المصفوفة من الرتبة r المكونة من أول r مجهول لا يساوي الصفر ونضع المعادلات (3) على الصورة

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r &= b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{aligned}$$

وإذا عوضنا عن المجاهيل $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ بقيماً اختيارية $c_{r+1}, c_{r+2}, \dots, c_n$ على الترتيب فإن المجموعة تصبح

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1r} x_r &= b_1 - a_{1,r+1} c_{r+1} - \dots - a_{1n} c_n \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2r} x_r &= b_2 - a_{2,r+1} c_{r+1} - \dots - a_{2n} c_n \\
\vdots \qquad \vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rr} x_r &= b_r - a_{r,r+1} c_{r+1} - \dots - a_{rn} c_n
\end{aligned} \qquad (4)$$

تسمى المجاهيل $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ **بالمجاهيل المطلقة** وعليه تصبح المجموعة (4) قابلة للحل حيث محدد معاملاتها لا يساوي الصفر وعليه نطبق طريقة كرامر . يلاحظ أنه في هذه الحالة بتغيير القيم الاختيارية للمجاهيل المطلقة نحصل على حل آخر وبذلك فإنه يمكن الحصول على عدد لا نهائي من الحلول أما في الحالة الأولى (عندما رتبة المصفوف تساوي عدد المجاهيل) وهي الحالة الوحيدة التي نحصل فيها على حل وحيد .

مثال (٦ ـ ١٦) :

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات

$$\begin{aligned}
5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}$$

نكون كلاً من مصفوفة المعاملات والمصفوفة الموسعة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A, B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

بحساب رتبة كل من المصفوفة A ، المصفوفة (A, B) نجد أن رتبة المصفوفة A تساوي 2 أما رتبة المصفوفة (A, B) تساوي 3 وعليه فإنه لا يوجد حل لمجموعة المعادلات (أي أن المجموعة متناقضة) .

مثال (٦ ـ ١٧) :

ادرس إمكانية وجود حل لمجموعة المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 - 2x_3 - \ x_4 + \ x_5 &= 1 \\ 3x_1 - \ x_2 + \ x_3 - 4x_4 + 3x_5 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + \ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

هذه المجموعة غير متناقضة لأن رتبة مصفوفة المعاملات ورتبة المصفوفة الموسعة متساوية وتساوي 2 . وذلك لأن الطرفين الأيسرين للمعادلتين الأولى والثانية غير مرتبطتين خطياً لأن معاملات المجهولين x_1 , x_2 تكون محدداً مصغراً غير صفري من الرتبة الثانية .

في هذه الحالة $r < n$ ولذلك نحل هذه المجموعة بحل المعادلتين الأولى والثالثة مع اعتبار المجاهيل x_3 , x_4 , x_5 مجاهيل مطلقة تحول إلى الطرف الأيمن .

$$\begin{aligned} x_1 + \ x_2 &= 1 + 2x_3 + \ x_4 - x_5 \\ x_1 + 5x_2 &= \ 9x_3 + 8x_4 - x_5 \end{aligned}$$

وبفرض أن المجاهيل أعطيت قيماً عددية ما وبتطبيق طريقة كرامر نحصل على الحل العام

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4$$

وبإعطاء المجاهيل المطلقة قيماً اختيارية مختلفة نحصل على حلول لمجموعتنا فمثلاً

$$(3, 5, 2, 1, -2) \quad , \quad (2, 5, 3, 0, 0,) \quad , \quad (0, -\frac{1}{4}, -1, 1, \frac{1}{4}).$$

مجموعة المعادلات الخطية المتجانسة

المعادلات الخطية المتجانسة المناظرة للمعادلات (1) تكون على الصورة

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \dots + & a_{mn}x_n = 0 \end{matrix} \qquad (5)$$

ينتج من نظرية كرونيكر ـ كابيللي أن هذه المجموعة دائماً غير متناقضة لأن إضافة عمود من الأصفار لا يغير من رتبة المصفوفة وبالتالي فإنه دائماً رتبة المصفوفة الموسعة تساوي رتبة مصفوفة المعاملات .

وبفرض أن رتبة المصفوفة تساوي r فإنه إما $r = n$ أو $r < n$

(١) إذا كانت $r = n$ فإنه يوجد حل وحيد هو الحل الصفري .

(٢) إذا كانت $r < n$ فإنه يتبع ما اتبع في حالة المعادلات غير المتجانسة وعليه يكون لهذه المجموعة (5) عدد لا نهائي من الحلول ويمكن اختيار مجموعة قصوى من هذه الحلول ليكون أي حل آخر هو عبارة عن ارتباط خطي في متجهات هذه المجموعة .

تعريـــف :

المجمـوعـة القـصوى من حلول المعادلات (5) والتي يكون أي حل آخر هو عبـارة عن ارتبـاط خطي في مـتجهـات هذه المجموعة تسـمى **مجـمـوعـة الحلول الأساسية .**

أي أنه أي مـتجه ذو n بُعـداً يكون حـلاً للمـجموعـة (5) إذا - وفـقط إذا - كان هو عبارة عن ارتباط خطي في متجهات مجموعة الحلول الأساسية .

يلاحظ أنه في حالة $r < n$ يكون عدد المجاهيل المطلقة يساوي $(n-r)$.

مثال (٦ ـ ١٨) :

ادرس حل مجموعة المعادلات ا لمتجانسة

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\
2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 &= 0 \\
x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 &= 0 \\
x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 &= 0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن رتبـة مـصفـوفة المعامـلات تسـاوي 2 وعـدد المجاهـيل يسـاوي 5 ولذلك تتكون كل مـجموعة أساسية لحلول هذه المجـموعـة من ثلاثة حـلول . نحل هذه المجـموعـة ويكفي أن نحل المعـادلتين الأولى والثـانيـة غيـر المرتبطتين خطـياً . ونعتبر x_3, x_4, x_5 مجاهيل مطلقة فنحصل على الحل العام .

$$x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5$$

$$x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5$$

ثم نأخذ المتجهات الثلاثة ذات الأبعاد الثلاثة غير المرتبطة خطياً (0, 0, 1) , (0, 1, 0) , (1, 0, 0) وبالتعويض في الحل العام باعتبار مركبات كل متجه قيماً للمجاهيل المطلقة ونحسب x_1 , x_2 نحصل على المجموعة الأساسية وهي

$$\alpha_1 = \left(\frac{19}{8} , \frac{7}{8} , 1, 0, 0 \right)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{3}{8} , \frac{-25}{8} , 0, 1, 0 \right)$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{-1}{2} , \frac{1}{2} , 0, 0, 1 \right)$$

مثال (٦ ـ ١٩) :

افرض نظام المعادلات الخطية

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_2 + 3x_3 = 3$$

نكون كل من مصفوفة المعاملات A والمصفوفة الموسعة (A, B)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad (A, B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

نجد أن رتبة المصفوفة A = رتبة المصفوفة (A, B) = 3

إذن يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات يمكن إيجاده بطريقة كرامر

مثال (٦ ـ ٢٠) :

النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة A = 2 ، ورتبة المصفوفة (A, B) = 3

إذن لا يوجد حل لهذا النظام (معادلات متناقضة)

نظرية (٦ ـ ٨) :

الفرق بين حلّين لمجموعة المعادلات غير المتجانسة (1) يكون حلاً لمجموعة المعادلات المتجانسة (5) .

البرهان :

نفــرض أن $(r`_1, r`_2, \dots, r`_n)$, $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ هـمـا حلان مختلفان للمجموعة (1)

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(r_i - r`_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} r_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ji} r`_i = b_j - b_j = 0$$

أي أن $(r_1 - r`_1, r_2 - r`_2, \dots, r_n - r`_n)$ هو حل لمجموعة المعادلات (5) التي تكون المعادلة رقم j فيها هي

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = 0$$

تعريـــف :

مـجمـوعـة المتـجـهـات $S = \{ X_1 , X_2 , \ldots , X_r \}$ في الفـضـاء $\mathbb{R}^n$ تعرف بـأنـهــا **مجمــوعــة متعامــدة** إذا كـان كـل متجهان مختلفان في S متعـامدين أي أنه $X_i . X_j = 0, \ i \neq j$. كـما تعرف **المجموعة المتعامدة المُعيَّرة** بأنها مجموعة متعامدة من متجهاتن الوحدة . أي أن المجموعة S تكون متعامـدة مُعيَّرة إذا كـان $X_i . X_j = 0, \ i \neq j$ إضافة إلى $X_i . X_i = 1$ حيث $1 \leq i , j \leq n$

مثال (٦ ـ ٢١) :

مجموعة المتجهات $S = \{ X_1 , X_2 , X_3 \}$ حيث

$$X_1 = (-1, 0, 3) \quad , \quad X_2 = (0, 1, 0) \quad , \quad X_3 = (3, 0, 1)$$

مجموعة متعامدة في الفضاء $\mathbb{R}^3$ وذلك لأن

$$X_1 . X_2 = 0 \quad , \quad X_1 . X_3 = 0 \quad , \quad X_2 . X_3 = 0$$

ولتكوين مجموعة متعامدة مُعيَّرة من متجهات المجموعة S نوجد متجهات الوحدة لكل منهم

$$N_1 = E_{X_1} = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \ , \ 0 \ , \ \frac{3}{\sqrt{10}} \right)$$

$$N_3 = E_{X_3} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \ , \ 0 \ , \ \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

فيكون N_1 , N_3 متجهي الوحدة في نفس اتجاه X_1 , X_3 على الترتيب وبما أن X_2 هو متجه وحدة فإن المجموعة $N = \{N_1 , X_2 , N_3\}$ مجموعة متعامدة مُعيَّرة مع ملاحظة أن كل من S , N يولدا نفس الفضاء .

نظرية (٦ ـ ٩) :

المجموعة المتعامدة من متجهات غير صفرية في الفضاء $\mathbb{R}^n$ تكون مستقلة خطياً .

البرهان :

نفرض المجموعة $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_r\}$ مجموعة متعامدة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ حيث $1 \le i \le r$, $X_i \ne 0$ ونحاول إثبات أن المجموعة S مستقلة خطياً .

نفرض المعادلة .

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r = 0 \qquad (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بالمتجه $X_i, \ 1 \le i \le r$ قياسياً نحصل على

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_r X_r) \cdot X_i = 0 \cdot X_i$$

$$\alpha_1 (X_1 \cdot X_i) + \alpha_2 (X_2 \cdot X_i) + \ldots + \alpha_r (X_r \cdot X_i) = 0$$

بما أن $X_j \cdot X_i = 0 \quad , \quad i \ne j, \ 1 \le i, j \le r$

إذن $\alpha_i (X_i \cdot X_i) = 0$

$$\alpha_i \ \| X_i \|^2 = 0$$

وبما أن $X_i \ne 0 , 1 \le i \le r$ إذن $\| X_i \|^2 \ne 0$

أي أن $\alpha_i = 0 \quad , \quad 1 \le i \le r$

إذن المجموعة S مستقلة خطياً .

نتيجة

أي مجموعة من المتجهات المتعامدة المُعايرة في $\mathbb{R}^n$ تكون مستقلة خطياً .

تعريـــف :

إذا كانت مجموعة المتجهات المتعامدة المُعيَّرة في الفضاء $\mathbb{R}^n$ عددها يساوي n فإنها تكون أساساً للفضاء $\mathbb{R}^n$.

والأساس المتعامد (المتعامد المُعيَّر) لفضاء متجه يكون أساس لمجموعة متعامدة (متعامدة مُعيَّرة) من المتجهات .

ملاحظة :

نلاحظ مما سبق إذا كانت المجموعة $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ أساساً للفضاء $\mathbb{R}^n$ فإن أي متجه $X \in \mathbb{R}^n$ نعبر عنه كتركيب خطي مع متجهات المجموعة S أي أن

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$$

ولإيجاد قيم $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ فعلينا أن نحل نظاماً من المعادلات الخطية عددها n في n من المجاهيل . بينما إذا كانت المجموعة S متعامدة مُعيَّرة فيمكننا إيجاد نفس القيم ولكن بطريقة مبسطة دون الحاجة لحل نظاماً من المعادلات الخطية كما يتضح من النظرية التالية .

نظرية (٦ ـ ١٠) :

إذا كانت المجموعة $N = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ أساس متعامد مُعاير للفضاء $\mathbb{R}^n$ والمتجه X أي متجه في الفضاء $\mathbb{R}^n$

فإن $$X = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots + \alpha_n N_n$$

حيث $$\alpha_i = X \cdot N_i \quad , \quad 1 \le i \le n$$

البرهان :

نفرض المعادلة

$$X = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots + \alpha_n N_n \qquad (1)$$

بضرب طرفي المعادلة (1) بالمتجه $N_i \ , \ 1 \le i \le n$ قياسياً نحصل على

$$X . N_i = (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \ldots + \alpha_n N_n) . N_i$$

$$= \alpha_1 (N_1 . N_i) + \alpha_2 (N_2 . N_i) + \ldots + \alpha_n (N_n . N_i)$$

بما أن $N_j . N_i = 0 \quad , \quad i \neq j \, ; \, 1 \le i , j \le n$

$$X . N_i = \alpha_i (N_i . N_i)$$

$$X . N_i = \alpha_i \| N_i \|^2$$

وبما أن $\| N_i \| = 1 \quad , \quad 1 \le i \le n$

إذن $\alpha_i = X . N_i \quad , \quad 1 \le i \le n.$

مثال (٦ ـ ٢٢) :

بفرض $N = \{ N_1 , N_2 , N_3 \}$ مجموعة الأساس المتعامد المُعيَّر للفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث

$$N_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{3}{\sqrt{10}} \right) , \ N_2 = (0, 1, 0) \ , \ N_3 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}} , 0 , \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

اكتب المتجه X كتركيب خطي مع المتجهات N_1 , N_2 , N_3

حيث $X = (2, 1, 3)$

لكي يكون المتجه X تركيباً خطياً مع المتجهات N_1 , N_2 , N_3 علينا أن نوجد $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 \in \mathbb{R}$

بحيث $$X = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2 + \alpha_3 N_3$$

بتطبيق نظرية (٦ ـ ١٠) يمكننا إيجاد القيم $\alpha_i , \quad 1 \le i \le 3$

$$\alpha_1 = X . N_1 = \frac{7}{\sqrt{10}} , \quad \alpha_2 = X . N_2 = 1 , \; \alpha_3 = X . N_3 = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

إذن $$X = \frac{7}{\sqrt{10}} \; N_1 + N_2 + \frac{9}{\sqrt{10}} \; N_3$$

ملاحظة :

بفرض W فضاءاً جزئياً من الفضاء $\mathbb{R}^n$. كما نعلم أنه ليس شرطاً أن يحتوي على أي من متجهات الأساس المعتاد . ولكي يكون لهذا الفضاء الجزئي أساساً له نفس خواص الأساس المعتاد . أي أنه يحتوي على أساس S بحيث إن كل متجه في S طوله الوحدة وأي متجهين مختلفين في S متعامدين . والطريقة المتبعة للحصول على مثل هذا الأساس تعرف **بعملية جرام ـ شميت** التي سوف نشرحها في النظرية التالية والتي يعتمد برهانها على تكوين هذا الأساس والذي يعرف **بالأساس المتعامد المُعيَّر** .

نظرية (٦ ـ ١١) (عملية جرام ـ شميت):

إذا كان W فضاء جزئي غير صفري من الفضاء $\mathbb{R}^n$ له الأساس $S = \{X_1 , X_2 , \dots , X_m\}$ فإنه يوجد أساس متعامد مُعيَّر $N = \{N_1 , N_2 , \dots , N_m\}$ للفضاء الجزئي W .

البرهان:

الهدف من هذا البرهان هو تكوين أساس متعامد معاير للفضاء الجزئي W باستخدام أساس معلوم له S. ولكي نحقق ذلك فإننا أولاً نحاول إيجاد أساس متعامد $T = \{Y_1, Y_2, \dots Y_m\}$ للفضاء الجزئي W باتباع الخطوات التالية :

١ - أولاً نختار أحد متجهات المجموعة S وليكن X_1 ونسميه Y_1 إذن

$$Y_1 = X_1 \qquad (1)$$

٢ - نبحث عن متجه Y_2 في الفضاء الجزئي W_1 من W الذي ولد بالمجموعة $\{X_1, X_2\}$ بحيث يكون عمودياً على Y_1 وبما أن $Y_1 = X_1$
إذن W_1 يكون فضاءاً جزئياً ولد بالمجموعة $\{Y_1 , Y_2\}$

أي أن
$$Y_2 = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 X_2$$

نحاول إيجاد قيمة كل من α_1 , α_2 حيث $Y_2 . Y_1 = 0$

$$Y_2 . Y_1 = (\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 X_2) . Y_1$$
$$0 = \alpha_1 (Y_1 . Y_1) + \alpha_2 (X_2 . Y_1)$$

وبما أن $Y_1 . Y_1 \neq 0$ لأن $Y_1 \neq 0$ لأنه يساوي متجهاً ينتمي إلى الفضاء الجزئي غير الصفري .

إذن
$$\alpha_1 = -\alpha_2 \frac{X_2 . Y_1}{Y_1 . Y_1}$$

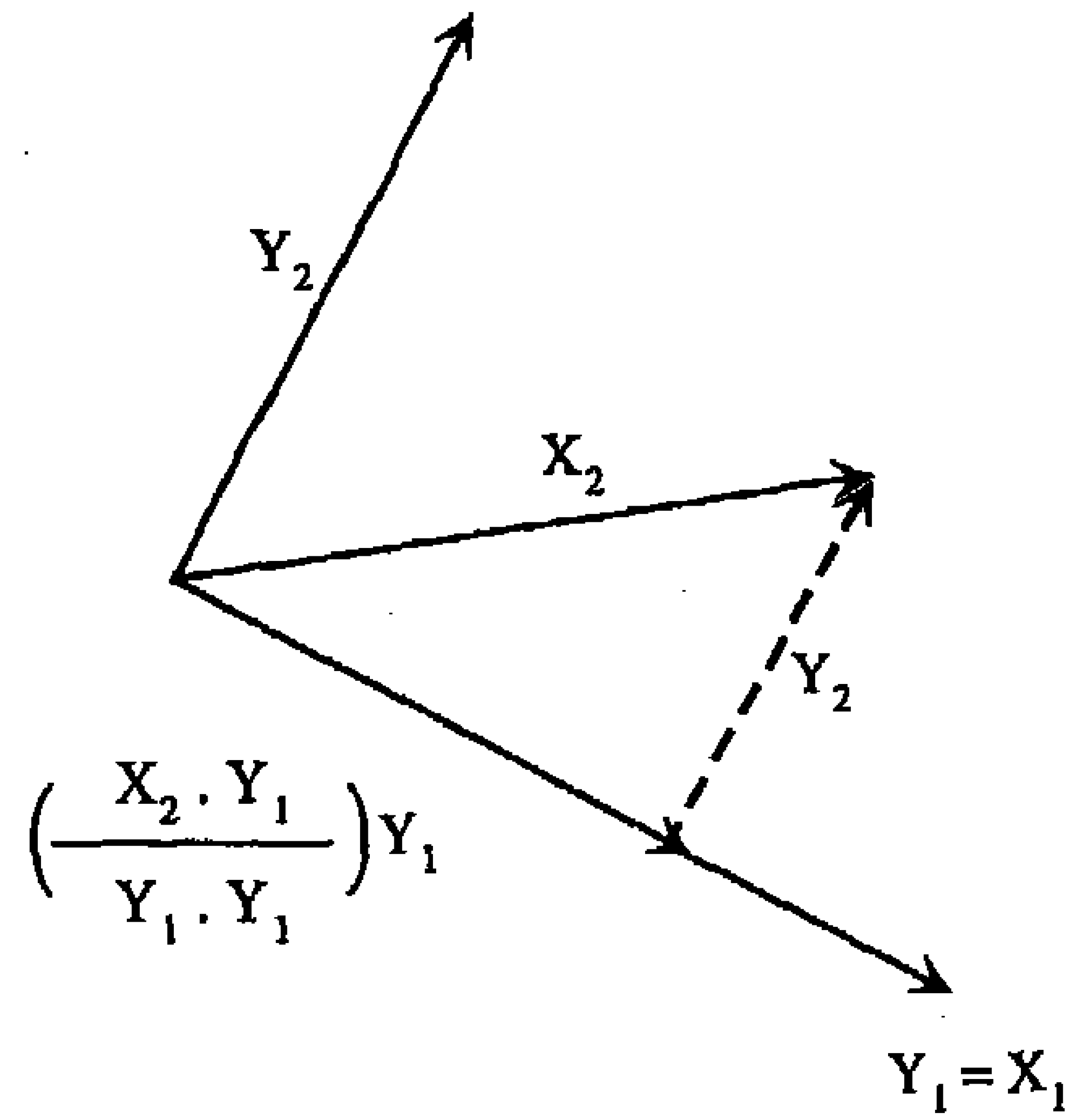
وبفرض أي قيمة اختيارية غير صفرية بالنسبة إلى α_2 ولتكن $\alpha_2 = 1$

نحصل على
$$\alpha_1 = -\frac{X_2 . Y_1}{Y_1 . Y_1}$$

وبالتالي فإن

$$Y_2 = X_2 - \left(\frac{X_2 \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1 \qquad (2)$$

نلاحظ أنه عند هذه الخطوة قد حصلنا على مجموعة متعامدة $\{Y_1 , Y_2\}$ من W . كما يتضح من الشكل المناظر .



٣ - نبحث عن متجه Y_3 في الفضاء الجزئي W_2 من W الذي ولد بالمجموعة $\{X_1 , X_2 , X_3\}$ ويكون عمودياً على كل من Y_1 , Y_2 وبما أن $Y_1 = X_1$ والمتجه Y_2 تركيب خطي مع المتجهين Y_1 , X_2 فإن W_2 يكون فضاءاً جزئياً ولد بالمجموعة $\{Y_1 , Y_2 , X_3\}$

أي أن $\quad Y_3 = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \beta_3 X_3$

حيث $\quad Y_1 \cdot Y_2 = 0 , \; Y_3 \cdot Y_1 = 0 \; , \; Y_3 \cdot Y_2 = 0$

$$Y_3 \cdot Y_1 = (\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \beta_3 X_3) \cdot Y_1$$

$$0 = \beta_1 (Y_1 \cdot Y_1) + \beta_2 (Y_2 \cdot Y_1) + \beta_3 (X_3 \cdot Y_1)$$

$$0 = \beta_1 (Y_1 . Y_1) + \beta_3 (X_3 . Y_1) \qquad (3)$$

$$Y_3 . Y_2 = (\beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 + \beta_3 X_3) . Y_2$$

$$0 = \beta_1 (Y_1 . Y_2) + \beta_2 (Y_2 . Y_2) + \beta_3 (X_3 . Y_2)$$

$$0 = \beta_2 (Y_2 . Y_2) + \beta_3 (X_3 . Y_2) \qquad (4)$$

ومن المعادلتين (4) ,(3) مع ملاحظة أن $Y_2 . Y_2 \neq 0$ لأن $Y_2 \neq 0$

نحصل على

$$\beta_1 = -\beta_3 \frac{X_3 . Y_1}{Y_1 . Y_1} \quad , \quad \beta_2 = -\beta_3 \frac{X_3 . Y_2}{Y_2 . Y_2}$$

وبفرض أي قيمة اختيارية غير صفرية بالنسبة إلى β_3 ولتكن $\beta_3 = 1$

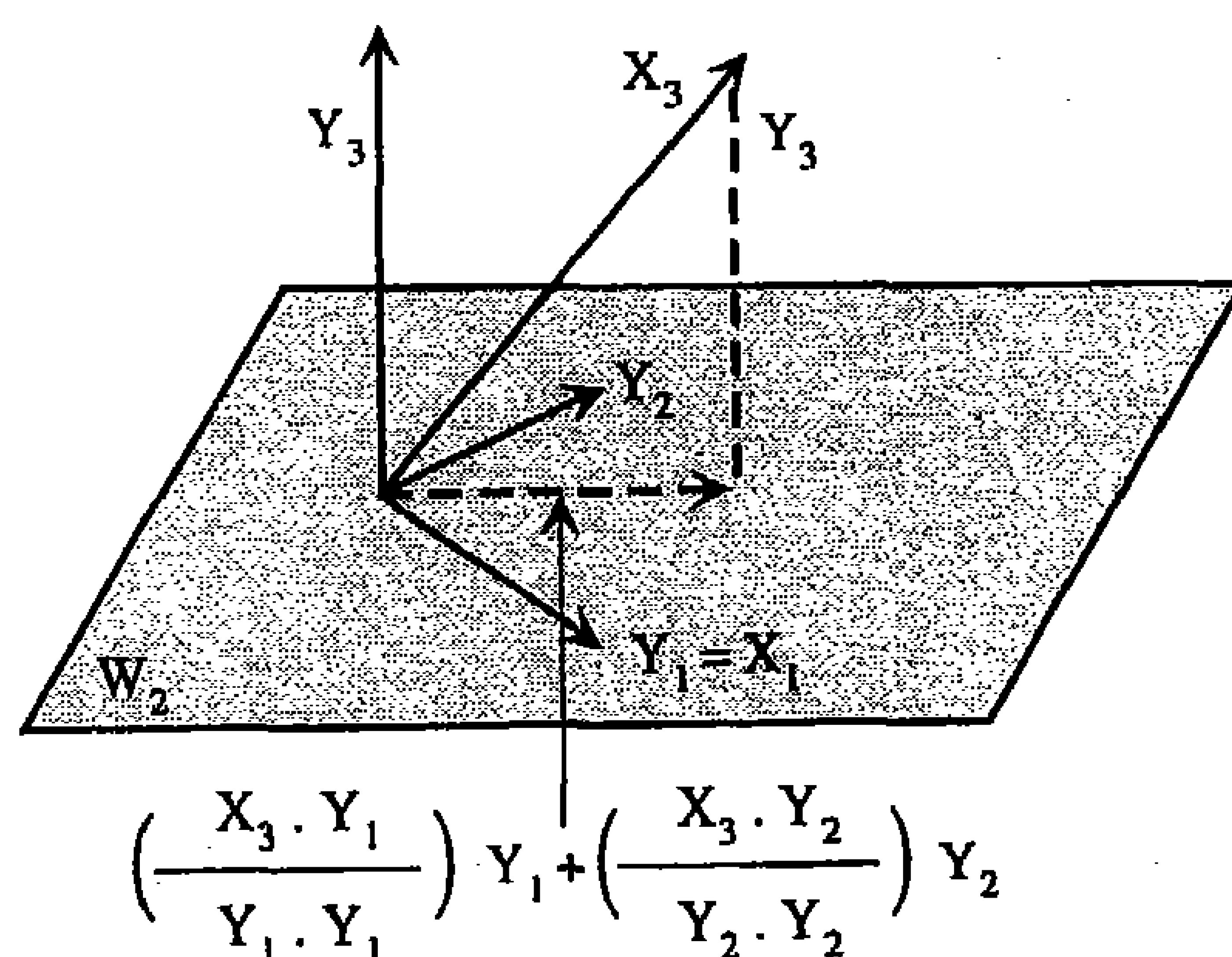
نحصل على

$$\beta_1 = -\frac{X_3 . Y_1}{Y_1 . Y_1} \quad , \quad \beta_2 = -\frac{X_3 . Y_2}{Y_2 . Y_2}$$

إذن

$$Y_3 = X_3 - \left(\frac{X_3 . Y_1}{Y_1 . Y_1} \right) Y_1 - \left(\frac{X_3 . Y_2}{Y_2 . Y_2} \right) Y_2$$

نلاحظ أنه عند هذه الخطوة قد حصلنا على مجموعة جزئية متعامدة $\{Y_1 , Y_2 , Y_3\}$ من W كما يتضح من الشكل المناظر .



وبالمثل نبحث عن متجه Y_4 في الفضاء الجزئي W_3 من W الذي ولد بالمجموعة $\{X_1 , X_2 , X_3, X_4\}$ ويكون عمودياً على كل من Y_1 , Y_2 , Y_3 وبالتالي فإن W_3 فضاء جزئي ولد بالمجموعة $\{Y_1 , Y_2 , Y_3, X_4\}$

نحصل على

$$Y_4 = X_4 - \left(\frac{X_4 . Y_1}{Y_1 . Y_1} \right) Y_1 - \left(\frac{X_4 . Y_2}{Y_2 . Y_2} \right) Y_2 - \left(\frac{X_4 . Y_3}{Y_3 . Y_3} \right) Y_3$$

وبتكرار هذه الطريقة واستخدام القانون

$$Y_i = X_i - \left(\frac{X_i . Y_1}{Y_1 . Y_1} \right) Y_1 - \left(\frac{X_i . Y_2}{Y_2 . Y_2} \right) Y_2 - \cdots - \left(\frac{X_i . Y_{i-1}}{Y_{i-1} . Y_{i-1}} \right) Y_{i-1} \ ,$$

$$2 \le i \le m$$

يمكننا الحصول على مجموعة متعامدة $T = \{Y_1 , Y_2 , \dots , Y_m\}$ وبما أنها تحتوي على m من المتجهات فإنها تكون أساس للفضاء الجزئي W . وبما أن الهدف الأساسي من هذه النظرية هو تكوين أساس متعامد مُعيَّر وبالتالي فإنه بمُعايرة المتجهات **(إيجاد متجه الوحدة لكل منهم)** $Y_i \ , \ 1 \le i \le m$ باستخدام العلاقة

$$N_i = E_{Y_i} = \frac{Y_i}{\|Y_i\|} \qquad , \qquad 1 \le i \le m$$

تكون المجموعة $N = \{N_1 , N_2 , \dots , N_m\}$ هي الأساس المتعامد المُعيَّر للفضاء الجزئي W .

مثال (٦ ـ ٢٣) :

بفرض W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ أساسه $S = \{X_1 , X_2\}$ حيث

$X_1 = (1, -1,0), X_2 = (2,0,1)$. استخدم عملية جرام ـ شميت لتحويل S إلى أساس متعامد مُعيَّر للفضاء الجزئي W .

نفرض $Y_1 = X_1 = (1, -1, 0)$

نحسب Y_2 باستخدام العلاقة

$$Y_2 = X_2 - \left(\frac{X_2 \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1} \right) Y_1$$

$$Y_2 = X_2 - \frac{2}{2} Y_1$$

$$= (2, 0, 1) - (1, -1, 0) = (1, 1, 1)$$

وبالتالي تكون المجموعة $T = \{Y_1 , Y_2\}$

$$= \{(1, -1, 0) , (1, 1, 1)\}$$

أساس متعامد للفضاء الجزئي W وبمُعايرة Y_1 , Y_2 نحصل على

$$N_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{-1}{\sqrt{2}} , 0\right)$$

$$N_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

وبالتالي تكون المجموعة $N = \{N_1 , N_2\}$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{-1}{\sqrt{2}} , 0\right) , \left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{1}{\sqrt{3}} \right)\right\}$$

أساس متعامد مُعيَّر للفضاء الجزئي W .

ملاحظة :

مما سبق يتضح لنا إذا كان X , Y أي متجهين في $\mathbb{R}^n$ حيث $X . Y = 0$ فإن $X . (\alpha Y) = 0$ لأي عدد قياسي α ويمكننا استخدام هذه النتيجة لتبسيط العمليات الحسابية في عملية جرام ـ شميت فإذا كان Y_i أحد متجهات الأساس المتعامد فإنه يمكننا ضربه بأي عدد قياسي مناسب للتخلص من أي كسور يحتويها وسنرمز له أيضاً بالرمز Y_i . وكما أشرنا فإن هذه العملية لا تغير من طبيعة الأساس المتعامد .

مثال (٦ ـ ٢٤) :

بفرض المجموعة $S = \{X_1 , X_2 ,X_3\}$ أساس للفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ حيث

$$X_1 = (1, 1, 1) \quad , \quad X_2 = (-1, 0, -1) \quad , \quad X_3 = (-1, 2, 3)$$

استخدم عملية جرام ـ شميت لتحويل S إلى أساس متعامد مُعيَّر للفضاء $\mathbb{R}^3$.

نفرض $\qquad Y_1 = X_1 = (1, 1, 1)$

نحسب كل من $\quad Y_2 , Y_3$

$$Y_2 = X_2 - \left(\frac{X_2 . Y_1}{Y_1 . Y_1} \right) Y_1$$

$$= (-1, 0, -1) - \left(\frac{-2}{3} \right) (1, 1, 1)$$

$$= \left(-\frac{1}{3} , \frac{2}{3} , -\frac{1}{3}\right)$$

نضربه في 3 للتخلص من الكسر ونستخدمه Y_2 أيضاً

$$Y_2 = (-1, 2, -1)$$

$$Y_3 = X_3 - \left(\frac{X_3 \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1 - \left(\frac{X_3 \cdot Y_2}{Y_2 \cdot Y_2}\right) Y_2$$

$$= (-1, 2, 3) - \frac{4}{3}(1, 1, 1) - \frac{2}{6}(-1, 2, -1)$$

$$= (-2, 0, 2)$$

إذن المجموعة $T = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$$= \{(1, 1, 1), (-1, 2, -1), (-2, 0, 2)\}$$

أساس متعامد للفضاء $\mathbb{R}^3$ ، وبمعايرة Y_1, Y_2, Y_3 نحصل على

$$N_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$N_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$N_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

إذن المجموعة $N = \{N_1, N_2, N_3\}$

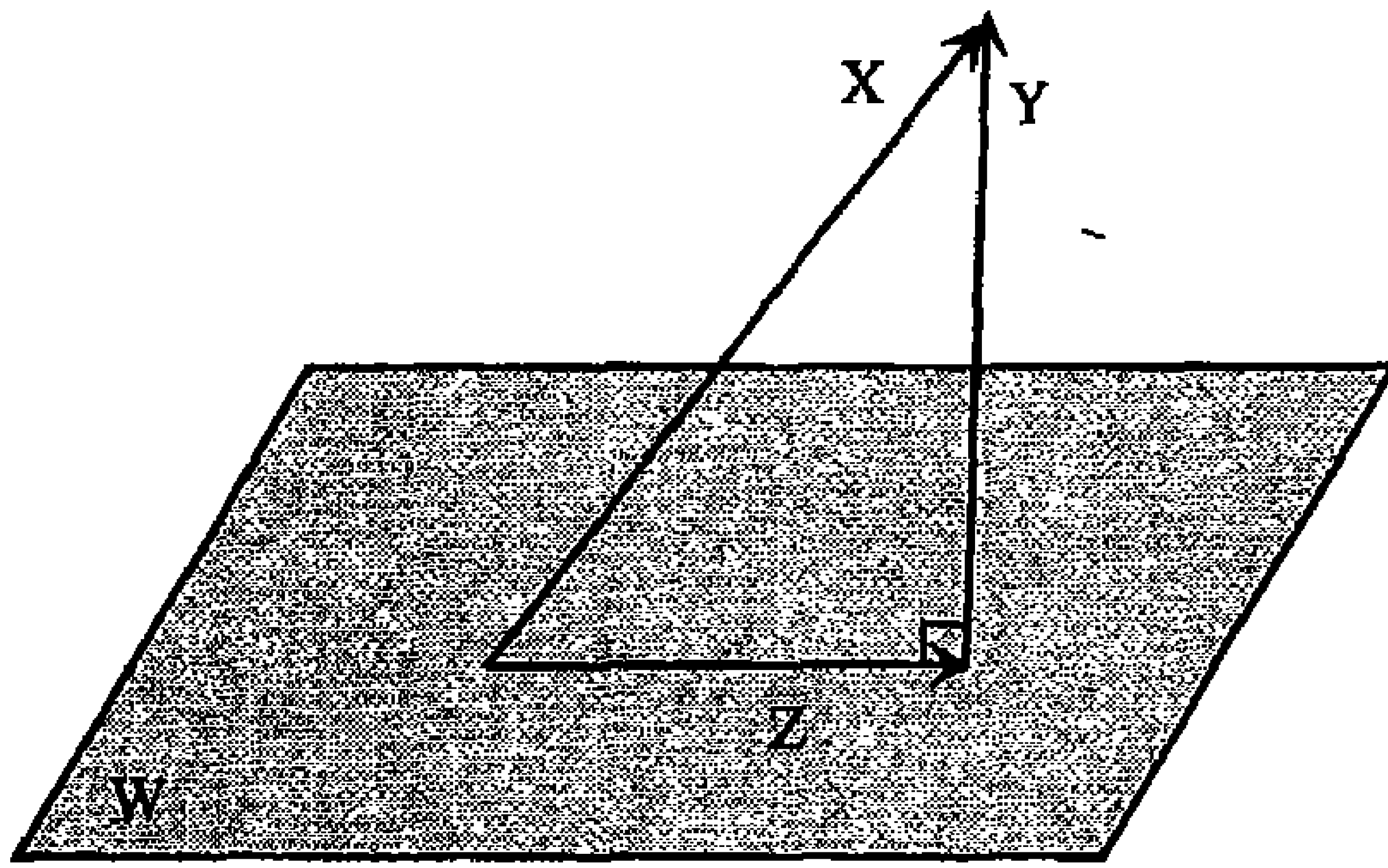
$$N = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

أساس متعامد مُعيَّر للفضاء $\mathbb{R}^3$.

تعريـــف :

إذا كان W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$ حيث $dim\, W = m$ ذا أساس متعامد مُعيَّر $\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ إذن كل متجه $X \in \mathbb{R}^n$ يكتب بطريقة وحيدة $X = Z + Y$ حيث $Z \in W$ ، والمتجه Y عمودي على كل متجه في W .

يعرف المتجه Z بأنه **المسقط العمودي للمتجه X على W** ويرمز له بالرمز $proj_W X$ كما يتضح من الشكل المناظر .



نلاحظ من هذا الشكل أن المسافة من X إلى W تساوي طول المتجه $Y = X - Z$ أي أنها تساوي $\| X - proj_W X \|$

ويمكن حساب المتجه Z باستخدام العلاقة

$$Z = proj_W X = (X.N_1)\, N_1 + (X.N_2)\, N_2 + \dots + (X.N_m)\, N_m$$

مثال (٦ ـ ٢٥) :

بفرض W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ حيث $dim\, W = 2$ وأساسه المتعامد المُعيَّر $\{N_1, N_2\}$ حيث

$$N_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right), \quad N_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

اكتب المتجه $X = (2, 1, 3)$ على صورة $Z + Y$ حيث $Z \in W$ ، والمتجه Y عمودي على كل متجه في W . ثم أوجد المسافة من X إلى W .

$$Z = proj_W X = (X.N_1)\, N_1 + (X.N_2)\, N_2$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{41}{18}, \frac{-1}{9}, \frac{49}{18}\right)$$

$$Y = X - Z = (2, 1, 3) - \left(\frac{41}{18}, \frac{-1}{9}, \frac{49}{18}\right)$$

$$= \left(\frac{-5}{18}, \frac{10}{9}, \frac{5}{18}\right)$$

إذن $X = Z + Y$

$$\| X - proj_W X \| = \| Y \|$$

$$= \sqrt{\frac{25}{324} + \frac{100}{81} + \frac{25}{324}}$$

$$= \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

نتـــائـــج :

إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ قابلة للانعكاس فإن :

١ - النظام الخطي المتجانس $AX = 0$ له فقط الحل الصفري .

٢ - المصفوفة A تكافيء صفياً مصفوفة الوحدة I_n .

٣ - النظام الخطي $AX = B$ غير متناقض لأي مصفوفة B من النوع $n \times 1$.

٤ - محدد المصفوفة A لايساوي الصفر .

٥ - رتبـة المصفوفة A تساوي n .

٦ - متجهات صفوف المصفوفة A مستقلة خطياً .

٧ - متجهات أعمـدة المصفوفة A مستقلة خطياً .

تمـــاريـــن (٦)

١ - ادرس إذا كانت مجموعة المتجهات التالية مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^3$ أم لا

(i) $\{(1, -2, 1)\ ,\ (2, 1, -1)\ ,\ (7, -4, 1)\}$

(ii) $\{(1, 2, -3)\ ,\ (1, -3, 2)\ ,\ (2, -1, 5)\}$

٢ - أي من مجموعات المتجهات التالية في $\mathbb{R}^3$ مرتبطة خطياً؟ وإذا كانت مرتبطة فعبر عن أحد المتجهات كتركيب خطي مع باقي المتجهات

(i) $\{X_1 = (4, 2, 1), X_2 = (2, 6, -5)\ ,\ X_3 = (1, -2, 3)\}$

(ii) $\{X_1 = (1, 2, -1)\ , X_2 = (3, 2, 5)\}$

(iii) $\{X_1 = (1, 1, 0)\ , X_2 = (0, 2, 3)\ , X_3 = (1, 2, 3)\ , X_4 = (3, 6, 6)\}$

(iv) $\{X_1 = (1, 2, 3)\ , X_2 = (1, 1, 1)\ ,\ X_3 = (1, 0, 1)\}$

٣ - أي من مجموعات المتجهات التالية تكون أساساً للفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ ؟

(i) $\{(1, 1, 2)\ ,\ (1, 2, 5)\ ,\ (5, 3, 4)\ ,\ (2, 1, -2)\}$

(ii) $\{(1, 2, 3)\ ,\ (1, 0, -1\ ,\ (3, -1, 0)\}$

٤ - أي من مجموعات المتجهات التالية تكون أساساً في الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$؟ ثم عبر عن المتجه $X = (2, 1, 3)$ كتركيب خطي مع متجهات المجموعة التي تكون أساساً .

(i) $\{X_1 = (1, 1, 1)\ ,\ X_2 = (1, 2, 3)\ ,\ X_3 = (0, 1, 0)\}$

(ii) $\{X_1 = (1, 2, 2)\ ,\ X_2 = (2, 1, 3)\ ,\ X_3 = (0, 0, 0)\}$

(iii) $\{X_1 = (-2, 1, 3)\ ,\ X_2 = (-1, 2, 3)\ ,\ X_3 = (-1, -4, -3)\}$

٥ - أي من مجموعات المتجهات التالية تكون أساساً في الفضاء المتجه $\mathbb{R}^4$؟ ثم عبر عن المتجه $X = (1, -5, 6, 9)$ كتركيب خطي مع متجهات المجموعة التي تكون أساساً .

(i) $\{X_1 = (1, -1, 2, 3) \quad , \quad X_2 = (1, 1, 0, 1),$

$X_3 = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad X_4 = (0, 1, 0, 0)\}$

(ii) $\{X_1 = (1, 1, 0, 2) \quad , \quad X_2 = (0, 1, -2, -1),$

$X_3 = (1, 1, -3, -3) \quad , \quad X_4 = (3, 2, -1, 2)\}$

(iii) $\{X_1 = (2, -4, 5, -3) \quad , \quad X_2 = (3, -1, 2, 0),$

$X_3 = (0, -2, 3, -5) \quad , \quad X_4 = (-1, 1, -2, 3)\}$

٦ - ليكن V الفضاء المتجه المكون من المصفوفات التي من النوع 2 x 2 على $\mathbb{R}$ ادرس إذا كانت مجموعات المصفوفات التالية $A, B, C \in V$ مرتبطة أم لا

(i) $\left\{A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

(ii) $\left\{A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

٧ - ليكن V الفضاء المتولد بكثيرات الحدود

$v_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1 \quad , \quad v_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$

$v_3 = t^3 + 6t - 5 \quad , \quad v_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

أوجد أساس وبُعد الفضاء V .

٨ - أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -7 & -8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

٩ - ليكن V الفضاء المتجه المكون من المصفوفات التي من النوع 2 x 2 على $\mathbb{R}$
أثبت أن مجموعة المصفوفات التالية تكون أساساً للفضاء V

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

١٠- أوجد البُعد والأساس لفضاء حل نظم المجموعات التالية :

(i)
$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

(ii)
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$x_2 + x_3 = 0$$

(ii)
$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$$
$$3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0$$

(iv)
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_1 + 5x_3 = 0$$
$$x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0$$

(v)
$$x + y + z = 0$$
$$3x + 2y - z = 0$$
$$2x - 4y + z = 0$$
$$4x + 8y - 3z = 0$$
$$2x + y - 2z = 0$$

(vi)
$$2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0$$
$$-2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + x_4 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

١١- اكتب متجهات الصفوف ومتجهات الأعمدة للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

١٢ - لكل من المصفوفات التالية أوجد كلاً من أساس الصفوف وأساس الأعمدة ورتبة المصفوفة .

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

١٣- في المصفوفات التالية أثبت أن فضاء الصفوف ، فضاء الأعمدة لهما نفس الرتبة

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

١٤- أي المجموعات التالية تكون مجموعة متجهات متعامدة؟

(i) $\{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (-1, 1, 1)\}$

(ii) $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$

١٥- أي المجموعات التالية تكون مجموعة متجهات متعامدة مُعيَّرة؟

(i) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (0, 1, 0)\}$

(ii) $\{(0, 2, 2, 1), (1, 1, -2, 2), (0, -2, 1, 2)\}$.

١٦- ما هي قيمة a لكي يكون المتجهان $X, Y \in \mathbb{R}^3$ متعامدان حيث

؟$X = (1, 1, -2), Y = (a, -1, 2)$

١٧- ما هي قيم a, b لكي تكون $\{X, Y\}$ مجموعة متعامدة مُعيَّرة حيث

$$X = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), Y = (a, \frac{1}{\sqrt{2}}, -b)$$

١٨- استخدم عملية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد مُعيَّر لفضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ أساسه $\{(1,0,2), (-1, 1, 0)\}$.

١٩- استخدم عملية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد مُعيَّر لفضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$ أساسه

$$\{(1, -2, 0, 1), (-1, 0, 0, -1), (1, 1, 0, 0)\}$$

٢٠- استخدم عملية جرام ـ شميت لإيجاد أساس متعامد مُعيَّر للفضاء الجزئي W من $\mathbb{R}^3$ الذي ولد بالمجموعة

$$\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}.$$

٢١- بفرض الأساس المتعامد المُعيَّر $N=\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

للفضاء $\mathbb{R}^2$ اكتب المتجه $(2, 3)$ كتركيب خطي مع متجهات المجموعة N .

٢٢- بفرض W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ أساسه المتعامد المُعيَّر $\{N_1, N_2\}$ حيث

$$N_1 = (0, 1, 0), N_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

اكتب المتجه $X = (1, 2, -1)$ على صورة $Z + Y$

حيث $Z = proj_W X$ ثم أوجد المسافة من المتجه X إلى W .

الباب السابع

التحويلات الخطية

LINEAR TRANSFORMATIONS

الباب السابع

التحويلات الخطيـــة

Linear Transformations

تعريــف :

نفرض لدينا المجموعتين X , Y وأنه لكل عنصر $x \in X$ عنصر واحد وواحد فقط $y \in Y$ فإن المجموعة f المكونة من مثل هذه العلاقة تسمى **تطبيق** من X إلى Y ويرمز لها

$$f : X \rightarrow Y \qquad f(x) = y$$

وتسمى y بقيمة f عند x أو صورة x .

تعريــف :

يعرف التطبيق $f : X \rightarrow Y$ بأنه **متباين (واحد إلى واحد أو أحادي)** إذا كانت للعناصر المختلفة في X صور مختلفة في Y

أي أنه إذا كان $a \neq a'$ فإن $f(a) \neq f(a')$

تعريــف :

يعرف التطبيق $f: X \rightarrow Y$ أنه **شامل (غامر أو فوقي)**

إذا كان كل عنصر $y \in Y$ ما هو إلا صورة لعنصر واحد على الأقل $x \in X$.

ويعرف التطبيق إذا كان متبايناً وشاملاً بأنه **تقابل (تناظر أحادي)** .

تعريـــف :

نفرض V , W فضاءين متجهين على المجال $\mathbb{K}$. نعرف أن التطبيق $L : V \rightarrow W$ إنه راسم (تحويل) خطي إذا حقق الشرطين التاليين :

(١) لأي متجهين $X, X` \in V$ فإن $L(X + X`) = L(X) + L(X`)$

(٢) لأي متجـــه $\alpha \in \mathbb{K}, X \in V$ فإن $L(\alpha X) = \alpha L(X)$

أي أن التطبيق يكون راسماً خطياً إذا حافظ على العمليتين الأساسيتين في الفضاء المتجه (جمع المتجهات وضرب المتجه بعدد قياسي) .

مثال (٧ ـ ١) :

ليكن $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ بحيث إن $L(x, y, z) = (x, y, 0)$

لإثبات أن L تحويل خطي نفرض أي المتجهين $X, Y \in \mathbb{R}^3$

حيث $Y = (x`, y`, z`)$, $X = (x, y, z)$

$$X + Y = (x + x`, y + y`, z + z`)$$

$$\begin{aligned} L(X + Y) &= L(x + x`, y + y`, z + z`) \\ &= (x + x`, y + y`, 0) \\ &= (x, y, 0) + (x`, y`, 0) = L(X) + L(Y) \end{aligned}$$

إذن $L(X + Y) = L(X) + L(Y)$

نفرض $\alpha \in \mathbb{R}$ إذن $\alpha X = \alpha (x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$$L(\alpha X) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\begin{aligned} L(\alpha X) &= L(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, \alpha y, 0) \\ &= \alpha (x, y, 0) = \alpha L(X) \end{aligned}$$

إذن $L(\alpha X) = \alpha L(X)$

لكل $X \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$

إذن L تحويل خطي .

يمكن دراسة نفس المثال بحيث $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لإثبات أن L تحويل خطي نفرض أن $X , Y \in \mathbb{R}^3$ بحيث إن

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X+Y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= L\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

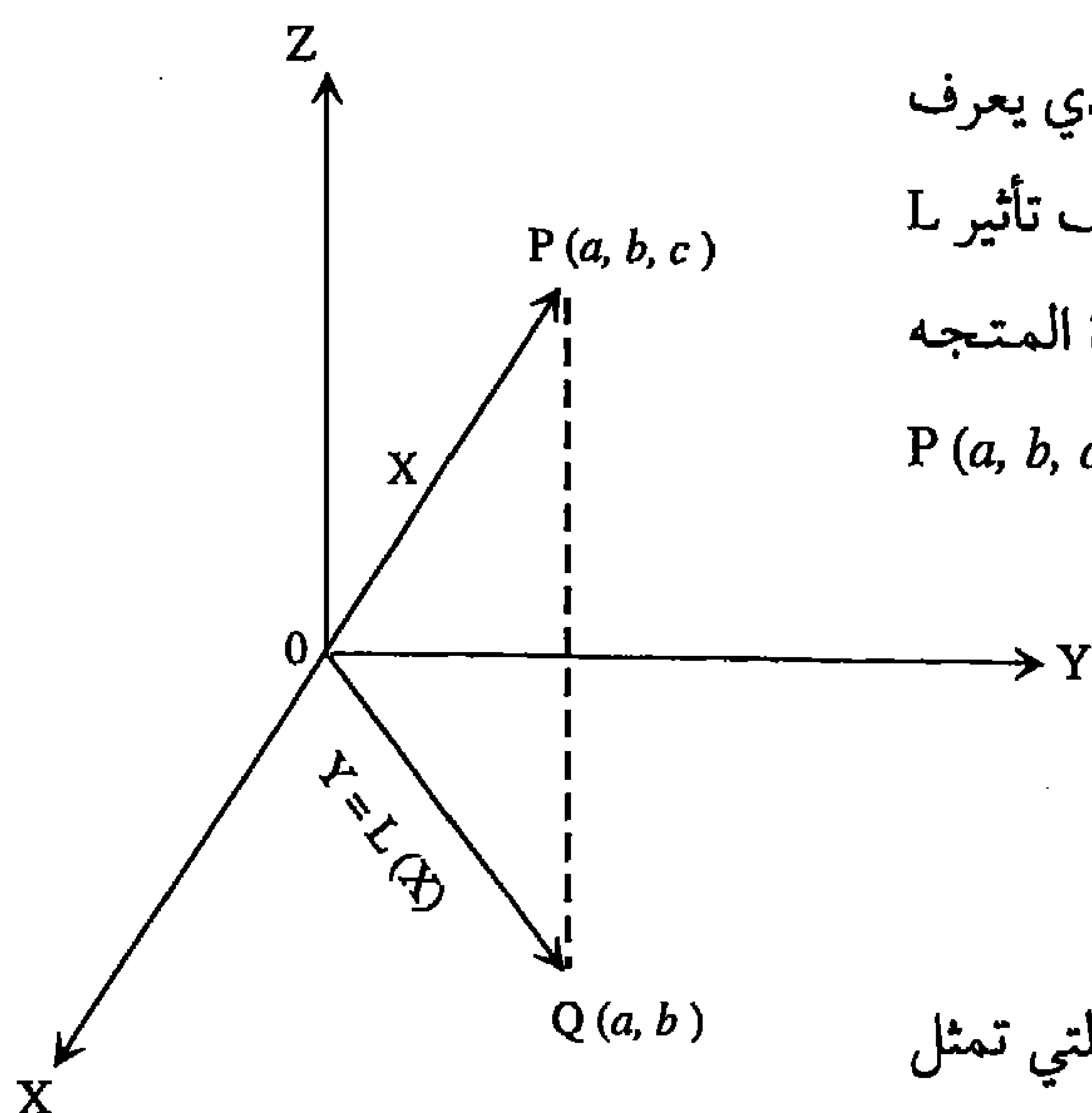
$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = L(X) + L(Y)$$

ولأي عدد حقيقي $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha X) = L\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \alpha L(X).$$

إذن L تحويل خطي . والذي يعرف بالمسقط ، ويمكن ببساطة وصف تأثير L هندسياً حيث إن صورة المتجه $X \in \mathbb{R}^3$ الذي نهايته النقطة $P(a, b, c)$ يمكن إيجادها برسم خط يمر بالنقطة P ومتعامد مع الفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ (المستوى X Y) . نحصل على النقطة $Q(a, b)$ التي تمثل تقاطع هذا الخط مع المستوى X Y . المتجه $Y \in \mathbb{R}^2$ والذي نهايته النقطة Q يمثل صورة المتجه X تحت تأثير L



مثال (٧ ـ ٢) :

ليكن $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ 2y \\ z \end{bmatrix}$$

لدراسة ما إذا كان L تحويلاً خطياً أم لا

نفرض المتجهين $X, Y \in \mathbb{R}^3$ بحيث

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X+Y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= L\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+1 \\ 2(y_1+y_2) \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}$$

$$L(x)+L(Y) = \begin{bmatrix} x_1+1 \\ 2y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+1 \\ 2y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2+2 \\ 2(y_1+y_2) \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}$$

نـلاحـظ أن $L(X+Y) \neq L(X)+L(Y)$. إذن L لا يكون تحـويلاً خطياً .

مثال (٧ ـ ٣) :

نفرض $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ المعرف كالتالي

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

من الواضح أن
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x-y \end{bmatrix}$$

نفرض المتجهين $X, Y \in \mathbb{R}$ حيث

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$X+Y = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X+Y)=L\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ (x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ (x_1-y_1)+(x_2-y_2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix}=L(X)+L(Y)$$

نفرض أي عدد حقيقي $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha X=\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}$$

$$L(\alpha X)=L\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha x_1-\alpha y_1 \end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix}$$

$$=\alpha L(X)$$

أي أن L يكون تحويلاً خطياً

مثال (٧ ـ ٤) :

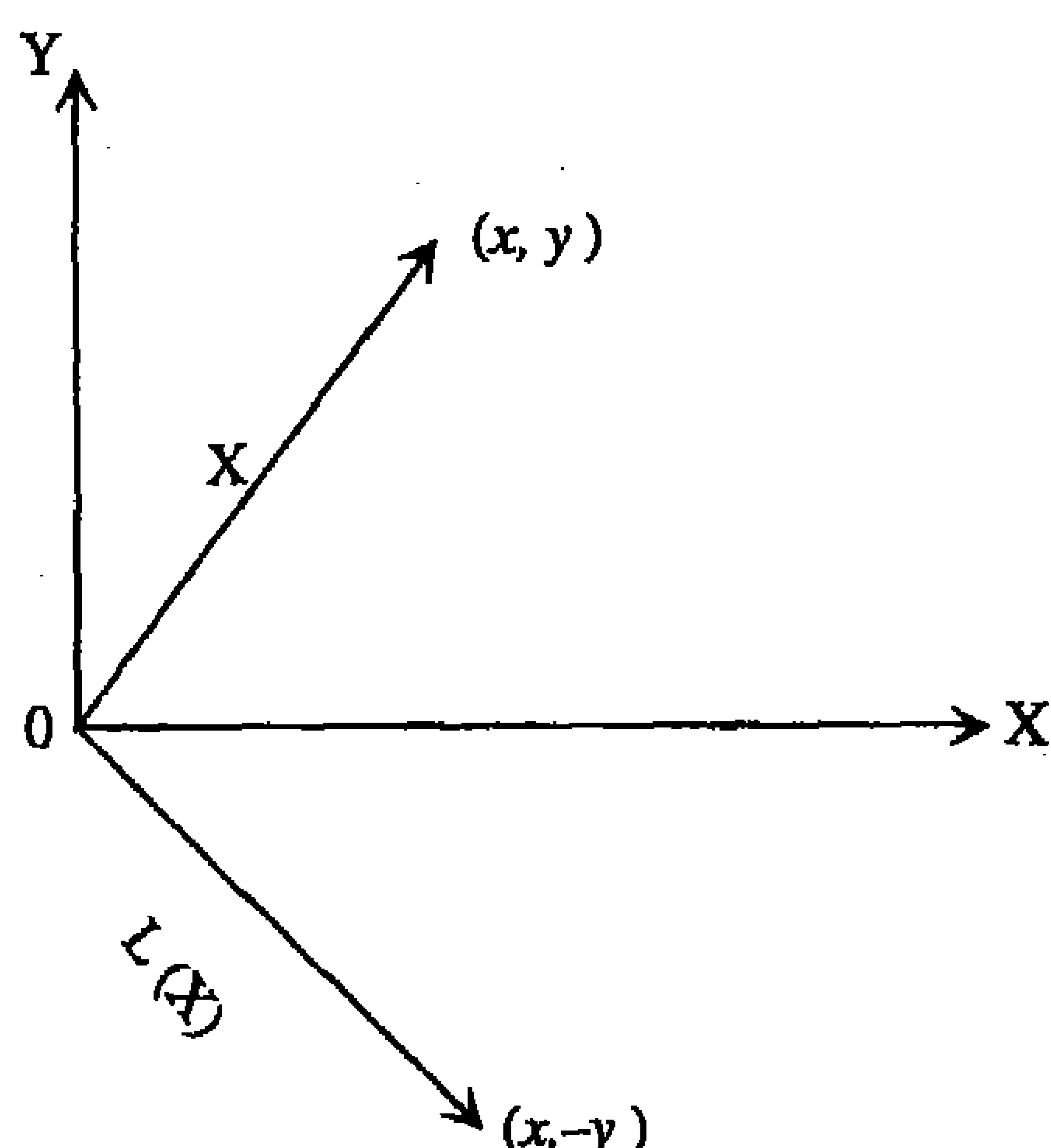
نفرض $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ المعرف بالصورة

$$L(X)=AX \quad , \quad X\in \mathbb{R}$$

والمصفوفة A من النوع $m \times n$ يكون L تحويلاً خطياً .

مثال (٧ ـ ٥) :

نفرض $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$



نجد أن L يمثل التحويل الخطي الموضح بالشكل ويسمى هذا التحويل الخطي **الانعكاس بالنسبة إلى محور السينات** .

(يمكن للقارئ أن يعرف الانعكاس بالنسبة إلى محور الصادات) .

نظرية (٧ ـ ١) :

إذا كان $L : V \to W$ تحويل خطي فإن

$$L\ (\alpha_1 X_1 + \alpha X_2 + \ldots + \alpha_n X_n)$$
$$= \alpha_1 L\ (X_1) + \alpha_2 L\ (X_2) + \ldots + \alpha_n L\ (X_n)$$

لأي أعداد قياسية $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ وأي متجهات $X_1 , X_2 , \ldots , X_n \in V$

البرهان :

من خواص التحويل الخطي نجد أن :

$$L\ (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n)$$
$$= L\ (\alpha_1 X_1) + L\ (\alpha_2 X_2) + \ldots + L\ (\alpha_n X_n).$$
$$= \alpha_1 L\ (X_1) + \alpha_2\ L\ (X_2) + \ldots + \alpha_n\ L\ (X_n).$$

نظرية (٧ ـ ٢):

نفرض $L: V \to W$ تحويلاً خطياً إذن

(١) $L(0_V) = 0_W$ حيث $0_V, 0_W$ المتجهات الصفرية في V, W على الترتيب .

(٢) $L(-X_1) = -L(X_1)$ لأي متجه $X_1 \in V$

(٣) $L(X_1 - X_2) = L(X_1) - L(X_2)$ لأي متجهين $X_1, X_2 \in V$

البرهان:

(١) حيث إن $0_V = 0_V + 0_V$

$$L(0_V) = L(0_V + 0_V)$$

وبما أن L تحويل خطي إذا

$$L(0_V) = L(0_V) + L(0_V)$$

بطرح $L(0_V)$ من طرفي المعادلة

$$L(0_V) - L(0_V) = L(0_V) + L(0_V) - L(0_V)$$

$$0_W = L(0_V)$$

إذن $L(0_V) = 0_W$

(٢)

$$L(-X_1) = L((-1).X_1) = (-1)L(X_1)$$

$$= L(X_1)$$

(٣)

$$L(X_1 - X_2) = L(X_1 + (-1).X_2)$$

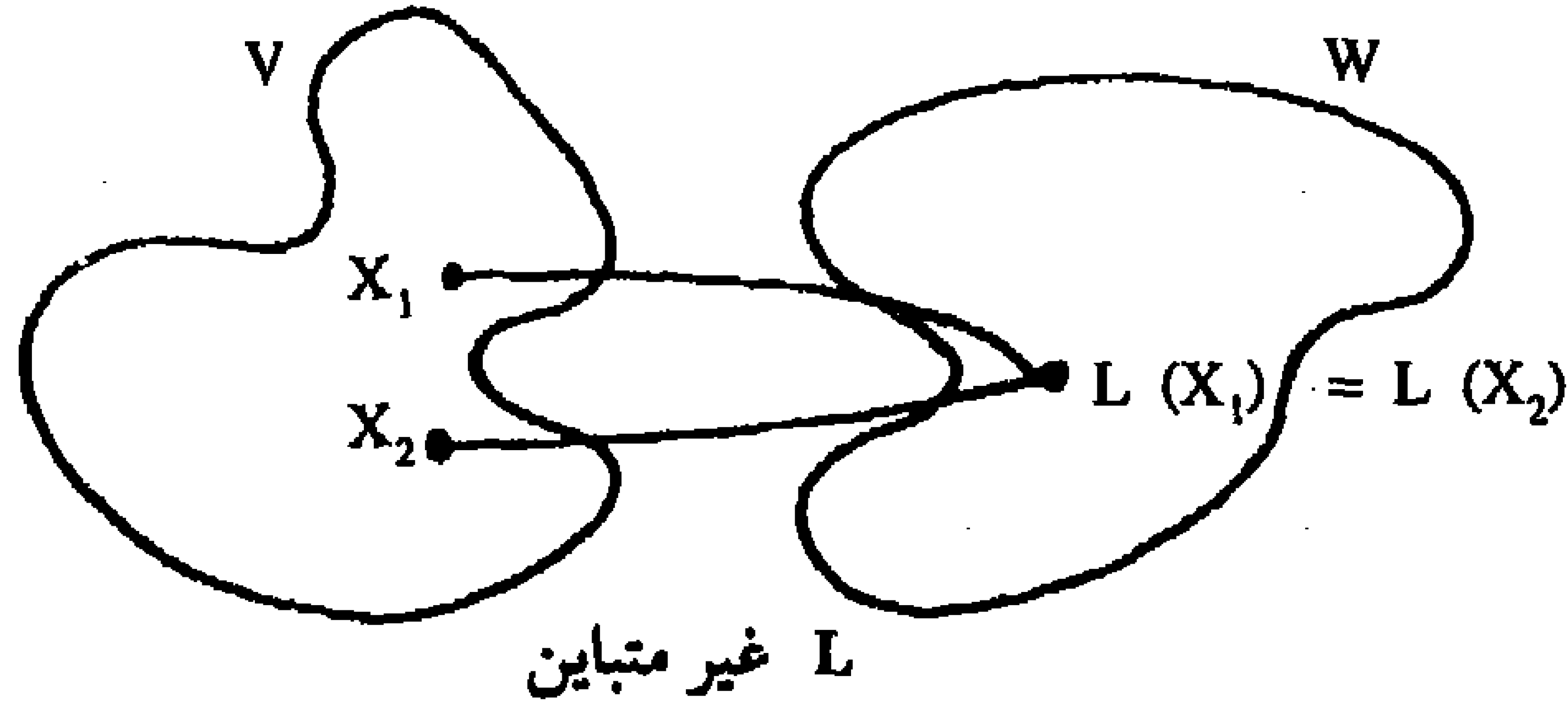
$$= L(X_1) + L((1-).X_2)$$

$$= L(X_1) + (-1).L(X_2)$$

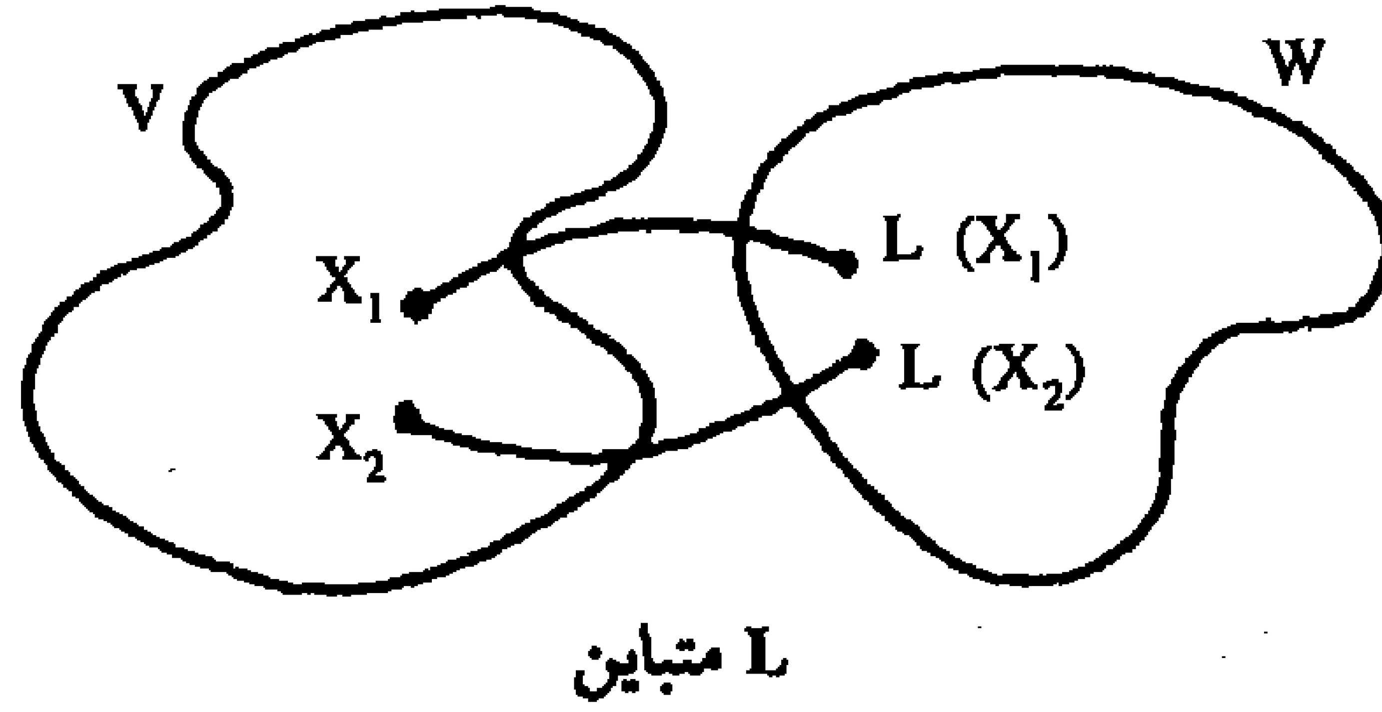
$$= L(X_1) - L(X_2)$$

تعريـــف :

يعرف التحويل الخطي $L : V \rightarrow W$ بأنه متباين (واحد إلى واحد) إذا كان $X_1 \neq X_2$ يؤدي إلى $L(X_1) \neq L(X_2)$ وبعبارة مماثلة إذا كان $L(X_1) = L(X_2)$ يؤدي إلى $X_1 = X_2$ أو بعبارة أخرى أن L متباين إذا كان $L(X_1), L(X_2)$ مختلفين ما دامت X_1, X_2 مختلفين .



L غير متباين



L متباين

مثال (٧ ـ ٦) :

نفرض التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالصورة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

لدراسة ما إذا كان L متبايناً أم لا؟ نفرض المتجهين

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

نفرض أن $L(X_1) = L(X_2)$

$$\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \end{bmatrix}$$

بمقارنة الطرفين

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$
$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

بحل المعادلتين نحصل على $x_1 = x_2 , y_1 = y_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \rightarrow X_1 = X_2$$

إذن L متباين لأنه إذا كان $L(X_1) = L(X_2)$ يؤدي إلى $X_1 = X_2$

تعريـــف :

نفرض التحويل الخطي $L : V \rightarrow W$ فإن مجموعة متجهات V التي تحولها (ترسمها) L إلى 0_W تسمى **نواة التحويل** L (**الفضاء الصفري لتحويل** L) ويرمز لها بالرمز $ker\,L$

$$ker\,L = \{ X \in V : L(X) = 0_W \}$$

كما تعرف مجموعة المتجهات من W التي تكون صوراً بتأثير L لمتجه واحد على الأقل من V تسمى **بمدى التحويل** ويرمز لها بالرمز $ran\,L$ أو $Im\,L$

$$Im\,L = ran\,L = \{ Y \in W \mid L(X) = Y \text{ for some } X \in V \}.$$

وإذا كان $ran\,L = W$ سمي التحويل **فوقياً (شاملاً)** .

مثال (٧ ـ ٧) :

نفرض التحويل الخطي L المعرف في المثال السابق

إذن $ker\, L$ يتكون من جميع المتجهات $X \in \mathbb{R}^2$ بحيث إن $L\ (X) = 0$

أي أن
$$\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فنحـصل على النظام الخطي $x - y = 0 \quad , \quad x + y = 0$

ولحل هاتين المعادلتين لا يوجد حل غير الحل الصفري $y = 0 \quad , \quad x = 0$

$$X = 0 \rightarrow ker\ L = \{0\}$$

مثال (٧ ـ ٨) :

نفرض التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ المعرف بالصورة .

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ z+w \end{bmatrix}$$

إذاً $ker\, L$ يتكون من جميع المتجهات $X \in \mathbb{R}^4$ بحيث إن $L\ (X) = 0$

أي أن
$$\begin{bmatrix} x+y \\ z+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبذلك نحصل على النظام الخطي

$$x + y = 0 \quad , \quad z + w = 0$$
$$x = -y \quad , \quad z = -w$$

إذن $ker\ L$ يتكون من جميع المتجهات التي على صورة $\begin{bmatrix} r \\ -r \\ s \\ -s \end{bmatrix}$

حيث r, s أي أعداد حقيقية .

نظرية (٧ ـ ٣) :

إذا كان $L : V \to W$ تحويلاً خطياً فإن

(١) $\ker L$ فضاء جزئي من V

(٢) $\operatorname{ran} L$ فضاء جزئي من W

البرهان:

(١) نفرض أن $X_1, X_2 \in \ker L$. وحيث إن L تحويل خطي .

إذن $L(X_1 + X_2) = L(X_1) + L(X_2) = 0_W + 0_W = 0_W$

إذن $X_1 + X_2 \in \ker L$

وأيضاً لأي عدد قياسي α نجد أن

$$L(\alpha X_1) = \alpha L(X_1) = \alpha . 0_W = 0_W$$

إذن $\alpha X \in \ker L$

إذن $\ker L$ هو فضاء جزئي من V (حيث إنه مغلق بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب في أعداد قياسية) .

(٢) نفرض $Y_1, Y_2 \in \operatorname{ran} L$ إذن $Y_1 = L(X_1)$, $Y_2 = L(X_2)$ لبعض $X_1, X_2 \in V$.

إذن $Y_1 + Y_2 = L(X_1) + L(X_2) = L(X_1 + X_2)$

وهذا يثبت أن $Y_1 + Y_2 \in \operatorname{ran} L$

وأيضاً لأي عدد قياسي α نجد أن

$$\alpha Y_1 = \alpha L(X_1) = L(\alpha X_1)$$

وهذا يثبت أن $\alpha Y_1 \in \operatorname{ran} L$

إذن $\operatorname{ran} L$ هو فضاء جزئي من W .

مثال (٧ ـ ٩) :

من مثال (٧ ـ ٧) نجد أن $ker\,L$ هو الفضاء الجزئي $\{0\}$ وبعده يساوي الصفر .

مثال (٧ ـ ١٠) :

من مثال (٧ ـ ٨) نجد أن أساس $ker\,L$ يتكون من المتجهين

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولهذا فإن $dim\,(ker\,L\ ) = 2$

تعريـــف :

يعرف التحويل الخطي $L : V \to W$ بأنه **منعزل** (شاذ) إذا كانت صورة متجه ما غير صفري تحت تأثير التحويل هو 0 .

أي أنه إذا كانت $X \neq 0,\ X \in V$, $L\ (X) = 0$

وغير شاذ إذا كانت صورة 0_V هي 0_W .

نظرية (٧ ـ ٤) :

التحويل الخطي $L\ :\ V\ \to\ W$ يكون متبايناً (واحد إلى واحد) إذا – وفقط إذا – كان $\{0_V\}$ = $ker\ L$.

البرهان :

نفرض أولاً أن L متباين ونحاول إثبات أن $ker\ L = \{0_V\}$

نفرض أن $X \in ker\, L$ إذن $L(X) = 0_W$ وبما أن $L(0_V) = 0_W$

$$L(X) = L(0_V)$$

وبما أن L متباين إذن $X = 0_V$

وبالتالي فإن $ker\, L = \{0_V\}$

لإثبات العكس نفرض أن $ker\, L = \{0_V\}$ ونحاول إثبات أن L متباين

نفرض أن $L(X_1) = L(X_2)$ حيث $X_1 , X_2 \in V$

$$L(X_1) - L(X_2) = 0_W$$

$$L(X_1 - X_2) = 0_W$$

وهذا يثبت أن $X_1 - X_2 \in ker\, L$

$$X_1 - X_2 = 0_V$$

$X_1 = X_2$ وبذلك يكون L متبايناً .

ويتضح من ذلك أن التحويل الخطي L المذكور في مثال (٧ ـ ٧) متباين .

مثال (٧ ـ ١١) :

نفرض التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالصورة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

حيث أن $$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بالرغم أن $$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

إذن L لا يكون متبايناً .

مثال (٧ ـ ١٢) :

نفرض التحويل الخطي المعرف في مثال (٧ ـ ١١)

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لدراسة ما إذا كان L شاملاً نختار أي متجه $\mathbb{R}^2 \ni Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

ونختبر إيجاد المتجه $\mathbb{R}^3 \ni X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ بحيث أن $L(X) = Y$.

حيث إن $L(X) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ نجد أنه إذا كان $x_2 = y_2$, $x_1 = y_1$

فـإن $L(X) = Y$

إذن L شامل وبعد $ran\ L$ يساوي 2 أي أن $dim(ran\ L) = 2$

مثال (٧ ـ ١٣) :

نفرض لدينا التحويل $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

هل L فوقي (شامل)؟

نفرض أي متجه $\mathbb{R}^3 \ni Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ حيث $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

ونبحث هل يمكن إيجاد المتجه $\in \mathbb{R}^3$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ بحيث إن $L(X) = Y$؟

نحاول إيجاد حل للنظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

باختزال الصفوف للمصفوفة الموسعة نحصل على

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - y_2 - y_1 \end{array}\right]$$

الحل يوجد فقط في حالة $y_3 - y_2 - y_1 = 0$

ولهذا فإن L ليس شاملاً لإيجاد أساس *ran* L نلاحظ أن

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حيث

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن $\{Y_1 , Y_2 , Y_3\}$ تولد مدى التحويل $ran\, L$
ولكن $\{Y_1 , Y_2\}$ مستقلان خطياً بينما $Y_3 = Y_1 + Y_2$
وعليه فإن Y_1 , Y_2 تكون أساساً $ran\, L$. إذن $dim\,(ran\, L) = 2$

تعريــف :

يعرف التحويل الخطي $L : V \rightarrow W$ بـأنـه متمـاثـل الشكل (متشاكل) إذا كان ذا تناظر أحادي ويعرف الفضاءان V, W إنهما متماثلان شكلاً .

نظرية (٧ ـ ٥) :

إذا كان التحويل الخطي $L : V \rightarrow W$ متشاكلاً فإن مجموعة المتجهات $X_1 , X_2 , \ldots , X_n \in V$ تكون مرتبطة خطياً في الفضاء V إذا – وفقط إذا – كانت المتجهات $Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_n \in W$ مرتبطة خطياً في الفضاء W

حيث $L\,(X_i) = Y_i \;,\; 1 \le i \le n$.

البرهان :

حيث إن $L : V \rightarrow W$ تشاكلاً

فإن $L^{-1} : W \rightarrow V$ تشاكلاً أيضاً

ولهذا يكتفي بأن نثبت هذه النظرية في اتجاه واحد .

نفرض المـتـجـهـات $X_1 , X_2 , \ldots , X_n \in V$ مرتبـطة خطياً وهذا يعني أنه توجد الأعدادت القياسية $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ التي لا تساوي جميعها أصفاراً بحيث إن

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n = 0$$

وبتأثير L على طرف المعادلة

$$L\ (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n) = L\ (0_V)$$

$$L\ (\alpha_1 X_1) + L\ (\alpha_2 X_2) + \ldots + L\ (\alpha_n X_n) = L\ (0_V)$$

$$\alpha_1 L\ (X_1) + \alpha_2 L\ (X_2) + \ldots + \alpha_n\ L\ (X_n) = 0_W$$

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \ldots + \alpha_n Y_n = 0_W$$

وهذا يعني أن المجموعة $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ مرتبطة خطياً هي الأخرى .

تعريـــف :

يعرف الفضاء الخطي V بأنه فضاء خطي **ذو عدد محدود من الأبعاد** إذا أمكن إيجاد مجموعة قصوى غير مرتبطة (مستقلة) خطياً من المتجهات ، وكل مجموعة من هذا النوع من المتجهات تسمى **بقاعدة (أساس) الفضاء V** وعدد هذه المتجهات تعرف **ببعد الفضاء** .

على سبيل المثال نفرض أن للفضاء الخطي V قاعدة مكونة من n من مجموعة المتجهات $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ فإذا كان X أي متجه من V فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهات القاعدة أي أن

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n \qquad (1)$$

تسمى الأعداد $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ **بإحداثيات المتجه X** في القاعدة المذكورة .

يمكن إثبات أن الصيغة (1) للمتجه X وحيدة نظراً لأن مجموعة المتجهات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ غير مرتبطة خطياً .

بفرض أن $X = \alpha`_1 X_1 + \alpha`_2 X_2 + \ldots + \alpha`_n X_n$

$$(\alpha_1 - \alpha`_1) X_1 + (\alpha_2 - \alpha`_2) X_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha`_n) X_n = 0$$

وحيث إن مجموعة المتجهات $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ مستقلة خطياً . إذن

$$\alpha_i - \alpha`_i = 0 \quad , \quad 1 \le i \le n$$

$$\alpha_i = \alpha`_i \quad , \quad 1 \le i \le n$$

ولذلك يناظر المتجه X صف وحيد $(\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n)$ مكون من معاملات صيغته (1) بدلالة القاعدة .

كما يرمز لإحداثيات المتجه X بدلالة القاعدة S

$$[X]_S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

مثال (٧ـ ١٤) :

نفرض $S = \{X_1 , X_2 , X_3\}$ تمثل أساس الفضاء الخطي $\mathbb{R}^3$ حيث

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

والمطلوب حساب إحداثيات المتجه $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ بدلالة (بالنسبة إلى) القاعدة S

نفرض إحداثيات المتجه هي $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3$ بحيث إن

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$$

وبذلك نحصل على النظام الخطي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام نجد أن $\alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 3 \quad , \quad \alpha_3 = -1$

إذن
$$[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال (٧ـ١٥) :

نفرض أن S هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$ ونفرض X أي متجه في $\mathbb{R}^n$.

إذن
$$[X]_S = X.$$

مثال (٧ـ١٦) :

نفرض $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ تمثل الأساس المعتاد للفضاء الاتجاهي V ذو بُعد n . حيث

$$X_1 = 1\,X_1 + 0\,X_2 + \dots + 0\,X_n$$

نحصل على
$$[X_1]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

بالمثل
$$[X_j]_S = E_j \qquad (2 \le j \le n)$$

حيث $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ تمثل الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^n$.

نظرية (٧ـ٦) :

إذا كان $L : V \to W$ تحويل خطي فإن

$$dim\,(ker\, L) + dim\,(ran\, L) = dim\, V \qquad (1)$$

البرهان :

نفرض $dim\, V = n \quad , \quad dim\,(ker\, L) = m$

١ - إذا كانت $m = n$ فإن $ker\ L = V$

أي أن $\forall X \in V \qquad L(X) = 0$

إذن $dim\,(ran\, L) = 0 \quad , \quad ran\ L = \{0\}$

وبالتالي تتحقق صحة العلاقة (1) .

٢ - إذا كانت $1 \le m < n$ سنحاول إثبات أن

$$dim \ (ran\ L) = n - m$$

نفرض أن $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ أساس $ker\ L$.

وكما سبق يمكننا توسيع هذا الأساس بحيث يكون

$S = \{X_1, X_2, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n\}$ أساس للفضاء V .

ولكي نحقق صحة العلاقة (1) في هذه الحالة $(1 \le m < n)$ سنحاول إثبات أن المجموعة $T = \{L(X_{m+1}), L(X_{m+2}), \dots, L(X_n)\}$ أساس $ran\, L$.

أولاً : نحاول إثبات أن T تولد $ran\, L$ لذلك نفرض Y أي متجه في $ran\, L$

إذن $Y = L(X)$ لبعض $X \in V$

وبما أن S أساس للفضاء V إذن يمكننا أن نعبر عن المتجه X كتركيب خطي مع متجهات المجموعة S أي أن

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

إذن

$$L(X) = L(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_m X_m + \alpha_{m+1} X_{m+1} + \ldots + \alpha_n X_n)$$

$$= \alpha_1 L(X_1) + \alpha_2 L(X_2) + \ldots + \alpha_m L(X_m)$$

$$+ \alpha_{m+1} L(X_{m+1}) + \alpha_{m+2} L(X_{m+2}) + \ldots + \alpha_n L(X_n)$$

وبما أن $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \ker L$

إذن $L(X_1) = L(X_2) = \ldots = L(X_m) = 0$

$$L(X) = \alpha_{m+1} L(X_{m+1}) + \alpha_{m+2} L(X_{m+2}) + \ldots + \alpha_n L(X_n)$$

إذن T تولد $ran\ L$

ثانياً : نحاول إثبات أن T مجموعة مستقلة

نفرض أن

$$\alpha_{m+1} L(X_{m+1}) + \alpha_{m+2} L(X_{m+2}) + \ldots + \alpha_n L(X_n) = 0_W \qquad (2)$$

أي أن

$$L(\alpha_{m+1} X_{m+1} + \alpha_{m+2} X_{m+2} + \ldots + \alpha_n X_n) = 0_W$$

إذن المتجه $\alpha_{m+1} X_{m+1} + \alpha_{m+2} X_{m+2} + \ldots + \alpha_n X_n \in \ker L$

وبالتالي فإنه يمكن كتابته على صورة تركيب خطي مع متجهات أساس $ker\ L$. أي أن

$$\alpha_{m+1} X_{m+1} + \alpha_{m+2} X_{m+2} + \ldots + \alpha_n X_n = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m$$

حيث $\beta_1 , \beta, \ldots , \beta_m \in \mathbb{R}$ إذن

$$\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m - \alpha_{m+1} X_{m+1} - \alpha_{m+2} X_{m+2} - \ldots - \alpha_n X_n = 0$$

وبما أن S مستقلة خطياً إذن

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_m = \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_n = 0$$

من المعادلة (2) نجد أن T مجموعة مستقلة

وبما أن T مجموعة مستقلة تولد $ran\ L$ إذن T أساس $ran\ L$.

٣ - إذا كانت $m = 0$ فإن $ker\ L$ ليس له أساس .

في هذه الحالة نفرض $\{X_1 , X_2 , \ldots , X_n\}$ أساس للفضاء V

ويمكن إثبات صحة العلاقة (1) مع بعض التعديلات البسيطة كما سبق .

نتيجة :

إذا كان $L : V \to W$ تحويل خطي وبفرض $dim\ V = dim\ W$

١ - إذا كان L متبايناً فإنه يكون شاملاً .

٢ - إذا كان L شاملاً فإنه يكون متبايناً (يترك البرهان كتمرين) .

العلاقة بين القواعد:

نفرض لدينا قاعدتين في الفضاء الخطي V ذو n بُعداً .

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_n \qquad (2)$$

$$\alpha`_1 , \alpha`_2 , \dots , \alpha`_n \qquad (3)$$

يلاحظ أن كل متجه من متجهات القاعدة (3) كأي متجه في الفضاء V يعبر عنه بدلالة القاعدة (2) بطريقة وحيدة

$$\alpha`_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \alpha_j \qquad 1 \le i \le n \qquad (4)$$

وتعرف المصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

التي صفوفها هي صفوف إحداثيات المتجهات (3) في القاعدة (2) بمصفوفة التحويل (الانتقال) من القاعدة (2) إلى القاعدة (3) .

ويمكن كتابة العلاقة بين القاعدتين والمصفوفة A طبقاً المعادلة (4) على الصورة

$$\begin{bmatrix} \alpha`_1 \\ \alpha`_2 \\ \vdots \\ \alpha`_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

حيث إننا رمزنا للعمودين المكونين من متجهات القاعدتين (3) ,(2) في صورة عمود متجه فإن

$$\alpha` = \begin{bmatrix} \alpha`_1 \\ \alpha`_2 \\ \vdots \\ \alpha`_n \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\alpha` = A\ \alpha$$

وإذا كانت A هي مصفوفة الانتقال من القاعدة (3) إلى القاعدة (2) فإنه

$$\alpha = A^{`} \alpha^{`}$$

$$= A^{`} (A \alpha)$$

$$\alpha = (A^{`} A) \alpha$$

بالمثل

$$\alpha^{`} = (A A^{`}) \alpha^{`}$$

ويما أن كلاً من القاعدتين $\alpha , \alpha^{`}$ غير مرتبطتين خطياً

إذن

$$A A^{`} = A^{`} A = I$$

حيث I مصفوفة الوحدة إذن $A^{`} = A^{-1}$

وعلى هذا نكون قد برهنا على أن مصفوفة الانتقال من قاعدة إلى أخرى تكون دائماً غير منعزلة

تحويل إحداثيات المتجه:

نفرض لدينا القاعدتين (3) , (2) في الفضاء الخطي ذو n بُعداً ولدينا كذلك مصفوفة الانتقال (التحويل) من القاعدة (2) إلى القاعدة (3) ، $A = [a_{ij}]$

حيث

$$\alpha^{`} = A \alpha$$

نجد أن العلاقة بين صفي إحداثيات أي متجه r في هاتين القاعدتين

$$r = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_j \quad , \quad r = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{`} \alpha_i^{`} \qquad (6)$$

أي أن $(\beta_1 , \beta_2 , \dots , \beta_n)$ هي إحداثيات المتجه r في القاعدة (2)

، و $(\beta_1^{`} , \beta_2^{`} , \dots , \beta_n^{`})$ هي إحداثيات المتجه r في القاعدة (3) .

$$r = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{`} \alpha_i^{`} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{`} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{`} a_{ij} \right) \alpha_j$$

وبالمقارنة مع المعادلة (6) نحصل على

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_i`\ a_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\beta_1`, \beta_2`, \ldots, \beta_n`)\ A \qquad (7)$$

وأيضاً

$$(\beta_1`, \beta_2`, \ldots, \beta_n`) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\ A^{-1} \qquad (8)$$

العلاقة (7) تعطي الإحداثيات في القاعدة (2) بدلالة القاعدة (3)
والعلاقة (8) تعطي الإحداثيات في القاعدة (3) بدلالة القاعدة (2) .

مثال (٧ـ١٧) :

نفرض الفضاء الخطي ذا الأبعاد الثلاثة الحقيقية وذا قاعدة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ وتكون المتجهات

$$\begin{aligned} \alpha_1` &= 5\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_2` &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \\ \alpha_3` &= -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

أيضاً قاعدة في نفس الفضاء وبذلك تكون مصفوفة التحويل من القاعدة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ إلى القاعدة $\alpha_1`, \alpha_2`, \alpha_3`$ هي

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ومصفوفة التحويل من القاعدة $\alpha_1`, \alpha_2`, \alpha_3`$ إلى القاعدة $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

هي

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكن إيجاد صف إحداثيات المتجه $r = \alpha_1 + 4\,\alpha_2 - \alpha_3$
في القاعدة $\alpha_1`, \alpha_2`, \alpha_3`$ باستخدام (8)

$$(\beta_1`, \beta_2`, \beta_3`) = (1, 4, -1)\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{bmatrix} = (-13,\ 6, -27)$$

أي أن $r = -13\,\alpha_1` + 6\,\alpha_2` - 27\,\alpha_3`$

مصفوفات التحويلات الخطية:

١ - نفرض أنه لدينا التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ فإنه يمكن إيجاد مصفوفة A من النوع $m \times n$ بفرض أن الأساس المعتاد $E_1, E_2, \dots, E_n$ للفضاء الخطي $\mathbb{R}^n$ فإن المصفوفة A التي لها $L(E_1), L(E_2), \dots, L(E_n)$ كمتجهات أعمدة تسمى **بالمصفوفة المعتادة للتحويل** L

أي أنه إذا كان

$$L(E_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ L(E_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \dots,\ L(E_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (٩)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ L(E_1) & L(E_2) & \dots & L(E_n) \end{matrix}$$

كما يمكن إثبات أن $L(X) = A\,X$

بما أن أي متجه $X \in \mathbb{R}^n$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة في صورة تركيب خطي مع متجهات الأساس .

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_n E_n$$

$$L(X) = x_1 L(E_1) + x_2 L(E_2) + \ldots + x_n L(E_n) \qquad (10)$$

وبما أن

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= x_1 L(E_1) + x_2 L(E_2) + \ldots + x_n L(E_n) \qquad (11)$$

بمقارنة (11) ,(10) نجد أن $L(X) = AX$

مثال (٧ ـ ١٨) :

أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

المعرف بالصورة
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$L(E_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad L(E_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن المصفوفة المعتادة للتحويل هي
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

كاختبار نلاحظ أن
$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

وهذا يتفق مع الصورة المعطاة للتحويل L .

مثال (٧ ـ ١٩) :

إذا كان التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

المعطى بالعلاقة
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة المعتادة لهذا التحويل .

$$L(E_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(E_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L(E_3) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

باستخدام $L(E_1)$, $L(E_2)$, $L(E_3)$ كمتجهات أعمدة .

إذن المصفوفة المعتادة لهذا التحويل هي
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وكاختبار نلاحظ أن

$$A\,X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} = L(X)$$

مثال (٧ ـ ٢٠) :

أوجد المصفوفة المعتادة للتحويل $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

المعرف بالعلاقة
$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

$$L(E_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(E_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(E_3) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

باستخدام $L(E_3)$, $L(E_2)$, $L(E_1)$ كمتجهات أعمدة

إذن المصفوفة المعتادة للتحويل هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

يمكن التأكد كذلك من أن $AX = L(X)$

حيث $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

(٢) إذا كان $L : V \to W$ تحويلاً خطياً من الفضاء الخطي V ذا n بعداً إلى الفضاء الخطي W ذو m بعداً (حيث $m \neq 0$, $n \neq 0$) وبفرض أن $S = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $T = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$ أساسا الفضائين V, W على الترتيب . إذن يمكن إيجاد مصفوفة A من النوع $m \times n$ التي يكون العمود j منها هو متجه الإحداثيات $[L(X_j)]_T$ للمتجه $L(X_j)$ بالنسبة إلى الأساس T مناظرة للتحويل L بالنسبة إلى الأساسيين S, T .

إذا كان $Y = L(X)$ لبعض $X \in V$ إذن $[Y]_T = A[X]_S$

مصفوفة L بالنسبة إلى الأساسيين $A = S, T$

$$= [L(X_1)]_T \ [L(X_2)]_T \ \dots \ [L(X_n)]_T$$

حيث $[X]_S , [Y]_T$ هما متجهات الإحداثيات لكل من X , Y بالنسبة إلى الأساس S , T على الترتيب .

(٣) إذا كان $L : V \to W$ تحويلاً خطياً وكان S, T هما الأساسين المعتادين للفضاءين V, W على الترتيب فإن المصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي بالضبط المصفوفة المعتادة للتحويل L التي نوقشت في الجزء (١) .

(٤) في الحالة الخاصة عندما $V = W$ (لهذا يكون $L : V \to V$ مؤثراً خطياً) فمن المعتاد أن نأخذ $S = T$ عند تكوين مصفوفة المؤثر L وتسمى المصفوفة الناتجة بمصفوفة L بالنسبة إلى الأساس S .

مثال (٧ ـ ٢١) :

نفرض التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالعلاقة

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

وأن $S = \{X_1 , X_2 , X_3\} \quad , \quad T = \{Y_1 , Y_2\}$

هما أساسان لكل من $\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2$ على الترتيب حيث إن

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(X_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 1$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = -1$$

بحل هذا النظام الخطي نحصل على $\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = -1$

$$[L(X_1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L(X_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 1$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{-2}{3}$$

$$[L(X_2)]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

$$L(X_3) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{4}{3}$$

$$[L(X_3)]_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة التحويل L هي $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{bmatrix}$

إذن تمثيل L بالنسبة إلى S , T يكون

$$[L(X)]_T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} [X]_S \qquad (1)$$

لتحقيق المعادلة نفرض $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$L(X) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

للحصول على $[X]_S$ نفرض النظام

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بمقارنة الطرفين نحصل على النظام الخطي

$$\alpha_1 \qquad + \alpha_3 = 1$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 6$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$$

بحل هذا النظام نحصل على $\alpha_1 = -3, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 4$

$$[X]_S = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

إذن من المعادلة (1) نجد أن

$$[L(X)]_T = A[X]_S = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{-11}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

إذن

$$L(X) = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 = \frac{10}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{11}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

وهي نفس قيمة $L(X)$ السابقة كما في المعادلة (2) .

مثال (٧ ـ ٢٢) :

نفرض $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ كما في المثال السابق مع فرض أن

$$S = \{X_3, X_2, X_1\} \quad , \quad T = \{Y_1, Y_2\}$$

حيث $X_1, X_2, X_3, \; Y_1, Y_2$ كما في المثال السابق .

نجد أن مصفوفة L هي

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-4}{3} & \frac{-2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من هذا المثال أنه إذا بدلنا ترتيب المتجهات في الأساس S فإنه يتم إبدال أعمدة مصفوفة التحويل L

مثال (٧ ـ ٢٣) :

نفرض التحويل الخطي $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالعلاقة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

بفرض S , T هما الأساسان المعتادان لكل من $\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2$ على الترتيب

حيث $T = \{Y_1 , Y_2\}$, $S = \{X_1 , X_2 , X_3\}$

$$L(X_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to \alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 1$$

$$[L(X_1)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(X_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \to \alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 2$$

$$[L(X_2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بالمثل

$$[L(X_3)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة L بالنسبة إلى S, T (تطبيق لما ذكر في الخاصية «٣») .

مثال (٧ ـ ٢٤) :

افرض المؤثر الخطي $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بالعلاقة

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى الأساس $S = \{X_1, X_2\}$

حيث

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(X_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \end{matrix}\right\} \to \alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

$$[L(X_1)]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(X_2) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 6 \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 3$$

$$[L(X_2)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بالنسبة إلى S

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(تطبيق لما ذكر في الخاصية «٤») .

تمــاريــن (٧)

١ - اذكر مما يلي أياً من L يكون تحويلاً خطياً

(i) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{bmatrix}$ (ii) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \\ x-z \end{bmatrix}$

(iii) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2+x \\ y-y^2 \end{bmatrix}$ (iv) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x^2 \\ 2z \end{bmatrix}$

(v) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ 3y-2z \\ 2z \end{bmatrix}$ (vi) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ 0 \\ 2x-z \end{bmatrix}$

٢ - إذا كان $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تحويلاً خطياً بحيث

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أوجد

(i) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ (ii) $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right)$

٣ - إذا كان $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ تحويلاً خطياً بحيث

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad , \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

أوجد

(i) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$ (ii) $L\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$

٤ - نفرض $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ y \end{bmatrix}$$

أ - أوجد $\ker L$

ب - هـل L متباين؟

حـ - هـل L شامل؟

٥ - نفرض $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

أ - هل L متباين

ب - أوجد بُعد $ran\ L$.

٦ - نفرض $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالعلاقة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \\ z-w \end{bmatrix}$$

أ - هل L شامل؟

ب - أوجد بُعد $\ker L$.

٧ - افرض أن $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ أساس للفضاء $\mathbb{R}^2$.

أوجد متجهات الإحداثيات لكل من المتجهات التالية :

(i) $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

٨ - بفرض $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ أساس الفضاء $\mathbb{R}^3$

أوجد متجهات الإحداثيات لكل من المتجهات التالية :

(i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

٩ - بفرض $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ أساس الفضاء $\mathbb{R}^3$

أوجد متجهات الإحداثيات لكل من المتجهات التالية

(i) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

١٠- بفرض القاعدتين في الفضاء الخطي $\mathbb{R}^2$.

$$\{F_1 = (1, 3)\ ,\ F_2 = (2, 5)\}\ ,\ \{E_1 = (1,0)\ ,\ E_2 = (0, 1)\}$$

أ ـ أوجد مصفوفة الانتقال من $\{E_i\}$ إلى $\{F_i\}$

ب ـ أوجد مصفوفة الانتقال من $\{F_i\}$ إلى $\{E_i\}$.

١١- افرض القاعدتين في الفضاء الخطي $\mathbb{R}^3$ هما

$$\{E_1 = (1, 0, 0)\ ,\ E_2 = (0, 1, 0)\ ,\ E_3 = (0, 0, 1)\}$$

$$\{F_1 = (1, 1, 1)\ ,\ F_2 = (1, 1, 0)\ ,\ F_3 = (1, 0, 0)\}$$

أ ـ أوجد مصفوفة الانتقال من $\{E_i\}$ إلى $\{F_i\}$

ب ـ أوجد مصفوفة الانتقال من $\{F_i\}$ إلى $\{E_i\}$

١٢- بفرض أن $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المؤثر الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}$$

ويفرض S هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^2$ ، $T = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$
أساساً آخر للفضاء $\mathbb{R}^2$. أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

أ - الأساس S .

ب - الأساسان S, T .

حـ - الأساسان T , S .

د - الأساس T .

هـ - احسب $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ باستخدام تعريف L وكذلك باستخدام المصفوفات التي حصلت عليها في كل من (أ) ، (ب) ، (حـ) ، (د) .

١٣- بفرض أن $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ 2x+y \\ x+y \end{bmatrix}$$

ويفرض أن S , T هما الأساسان المعتادان للفضائين $\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3$ على الترتيب . ويفرض أن

$$S` = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad T` = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

هما أساسان للفضائين $\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3$ على الترتيب .

أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى :

أ - الأساس S, T .

ب - الأساسان $S`, T`$.

حـ - احسب $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ باستخدام المصفوفات التي حصلت عليهما من (أ) ، (ب) .

١٤- بفرض أن $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المؤثر الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+z \\ 2x-y \\ 2y+z \end{bmatrix}$$

ويفرض S هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$, $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

أساساً آخر للفضاء $\mathbb{R}^3$.

أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

أ ـ الأساس S .

ب ـ الأساسان S, T .

حـ ـ الأساسان T , S .

د ـ الأساس T .

هـ ـ احسب $L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}\right)$ باستخدام المصفوفات(أ) ، (ب) ، (حـ) ، (د) .

١٥- بفرض أن $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بواسطة

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\y-z\end{bmatrix}$$

بفرض أن S, T هما الأساسان المعتادان للفضائين $\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2$ بالترتيب

$$S` = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right\} , \quad T` = \left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

هما أساسان آخران للفضائين $\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2$ على الترتيب

أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

أ ـ الأساسان S, T .

ب ـ الأساسان S`, T` .

حـ ـ احسب $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ باستخدام (أ) ، (ب)

١٦- لنفرض $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بالعلاقة

$$L\ (x, y, z) = (3x + 2y - 4z,\ x - 5y + 3z)$$

أوجد مصفوفة L بدلالة الأساسين التاليين

$$\{F_1 = (1, 1, 1)\ ,\ F_2 = (1, 1, 0)\ ,\ F_3 = (1, 0, 0)\}$$

$$\{G_1 = (1, 3)\ ,\ G_2 = (2, 5)\}$$

للفضائين $\mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2$ على الترتيب .

١٧- لنفرض $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بالعلاقة

$$L\ (x, y, z) = (2x + y - z\ ,\ 3x - 2y + 4z)$$

أوجد مصفوفة L بدلالة الأساسيين التاليين

$$\{F_1 = (1, 1, 1)\ ,\ F_2 = (1, 1, 0)\ ,\ F_3 = (1, 0, 0)\}$$

$$\{G_1 = (1, 3)\ ,\ G_2 = (1, 4)\}.$$

الباب الثامن

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

EIGENVALUES & EIGENVECTORS

الباب الثامن

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

Eigenvalues and Eigenvectors

يتناول هذا الباب دراسة المصفوفات المربعة ولذلك فإن جميع المصفوفات التي هي موضع الدراسة فيه هي من هذا النوع .

إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإنه يمكن إيجاد التحويل الخطي

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

حيث

$$L (X) = AX , \quad X \in \mathbb{R}^n$$

تعريـــف :

نفرض أن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$ ذات عناصر حقيقية . يعرف العدد الحقيقي λ **بالقيـمة الذاتية للمصـفوفة** A إذا وجد متجه غير صفري $X \in \mathbb{R}^n$ بحيث إن

$$A X = \lambda X \qquad (1)$$

والمتجه X غير الصفري الذي يحقق المعادلة (1) يسمى **بالمتجه الذاتي للمصفوفة** A المناظر للقيمة الذاتية λ (القيمة المميزة أو القيمة المثالية) .

تعريـــف :

نفـرض أن $A = [a_{ij}]$ مـصـفـوفـة مـربعـة مـن النوع $n \times n$ ذات عناصـر حقيقية ، $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن المصفوفة $A-\lambda I_n$ **تعرف بالمصفوفة المميزة** حيث I_n مصفوفة الوحدة من الرتبة n

$$A - \lambda\ I_n = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \qquad (2)$$

يكون محدد هذه المصفوفة $|A - \lambda I_n|$ كثيرة حدود من درجة n في المجهول λ ويرمز لها بالرمز $f(\lambda)$. أي أن

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

والمعادلة المميزة هي $\qquad f(\lambda) = 0$

تعريـــف :

تعرف كثيرة الحدود $f(\lambda) = |A - \lambda I_n|$ **بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة** A **وتعرف جذورها بالجذور المميزة لهذه المصفوفة .**

مثال (٨ ـ ١) :

إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

هي

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 28$$

مثال (٨ ـ ٢) :

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

هي

$$f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

نظرية (٨ ـ ١) :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي الجذور المميزة الحقيقية لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A .

البرهان:

نفرض λ هي قيمة ذاتية للمصفوفة A المناظرة للمتجه الذاتي X .

إذن $$AX = \lambda X$$

التي يمكن كتابتها على الصورة $$AX = (\lambda I_n)\, X$$

$$(A - \lambda I_n)\, X = 0 \qquad (3)$$

هذا النظام المتجانس في n من المعادلات في n من الماهيل . هذا النظام له حل غير الحل الصفري إذا - وفقط ذا - كان محدد مصفوفة المعاملات يساوي الصفر أي أن $|A - \lambda I_n| = 0$

وبالعكس ، إذا كان λ جذراً حقيقياً لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A إذن $|A - \lambda I_n| = 0$ ولهذا فإن النظام المتجانس (3) له حل غير الحل الصفري X . ولهذا فإن λ هي القيمة الذاتية للمصفوفة A .

مثال (٨ ـ ٣) :

أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المناظرة للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المميزة هي $A - \lambda\ I_2 = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

كثيرة الحدود المميزة هي $|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

جذور كثيرة الحدود المميزة $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$$

إذن $\lambda_2 = -1$, $\lambda_1 = 5$ وهما يمثلان القيم الذاتية للمصفوفة A .

ولإيجاد المتجه الذاتي المناظر إلى $\lambda_1 = 5$ نعوض عن قيمة λ_1

في المصفوفة المميزة فنحصل على $\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

ويكون المتجه الذاتي هو حل المجموعة المتجانسة

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

بفرض $x_1 = x_2 = 1$

إذن $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو المتجه الذاتي الذي يناظر $\lambda_1 = 5$.

ولإيجاد المتجه الذاتي المناظر إلى $\lambda_2 = -1$ نعوض عن قيمة λ_2

في المصفوفة المميزة فنحصل على $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ويكون المتجه الذاتي هو حل المجموعة المتجانسة

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad x_1 = -2x_2$$

بفرض $x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -1$

إذن المتجـه الـذاتي المناظـر إلـى $\lambda_2 = -1$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

مثال (٨ ـ ٤) :

لإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المناظرة للمصفوفة A من مثال (٨ ـ٢) . نجد أن كثيرة الحدود المميزة هي

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$$

لإيجاد المتجه الذاتي P_1 المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$

نكون النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} \frac{-r}{2} \\ \frac{r}{2} \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r . ولذلك فإن $P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$.

ولإيجاد المتجه الذاتي P_2 المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$

نكون النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجدأن $\begin{bmatrix} \frac{-r}{2} \\ \frac{r}{4} \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r . ولذلك فإن $P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$.

ولإيجاد المتجه الذاتي P_3 المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$

نكون النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} \frac{-r}{4} \\ \frac{r}{4} \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r . ولذلك فإن $P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر لقيمة $\lambda_3 = 3$.

مثال (٨ ـ ٥)

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ليست لها قيم ذاتية وذلك لأن كثيرة الحدود الذاتية

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

ولهذا فإن جذورها ليست حقيقية وبالتالي لا توجد قيم ذاتية لهذه المصفوفة .

ملاحظة

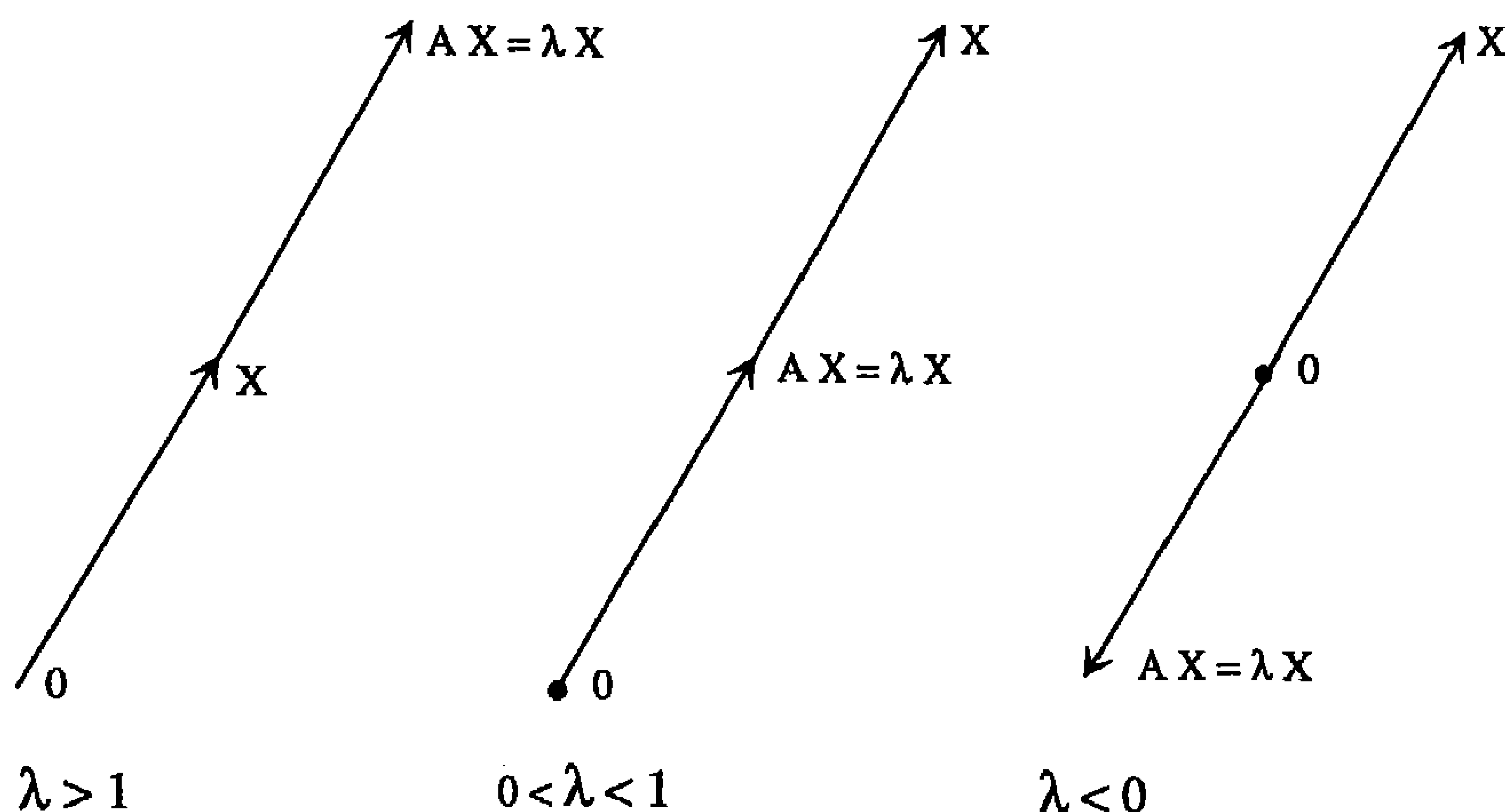
إذا كان X متجهاً ذاتياً للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية λ فإن AX , X يكونان متوازيين . ونستعرض العلاقة بين AX , X في الحالات المختلفة لقيمة λ (مع العلم بأن القيمة الذاتية λ يمكن أن تساوي الصفر أما المتجه الصفري 0 لا يمكن أن يكون متجهاً ذاتياً) .

(١) إذا كانت $\lambda < 0$ فإن AX يكون في عكس اتجاه X .

(٢) إذا كانت $0 < \lambda < 1$ فإنه في هذه الحالة ينكمش المتجه X .

(٣) إذا كانت $\lambda > 1$ فإنه يحدث تمدد للمتجه X .

ويمكن توضيح هذه الحالات الثلاث بالشكل التالي



تعريـــف :

إذا كانت A , B مصفوفتين مربعتين . فإننا نقول إن **المصفوفة B متشابهة (متفقة) مع المصفوفة A** إذا أمكن إيجاد مصفوفة P غير منعزلة (قابلة للانعكاس) بحيث إن

$$B = P^{-1} A P$$

خواص التشابه:

١ - المصفوفة A متشابهة مع نفسها .

٢ - إذا كانت المصفوفة B متشابهة مع المصفوفة A فإن المصفوفة A تكون متشابهة مع المصفوفة B .

نفرض B متشابهة مع A فإن $B = P^{-1} A P$

$$P B P^{-1} = P (P^{-1} A P) P^{-1}$$

$$= (P P^{-1}) A (P P^{-1})$$

$$P B P^{-1} = A$$

إذن A متشابهة مع B .

٣ - إذا كانت المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة B . والمصفوفة B متشابهة مع المصفوفة C فإن المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة C .

نفرض A متشابهة مع B , B متشابهة مع C فإن

$$A = S^{-1} B S \quad , \quad B = T^{-1} C T$$

$$A = S^{-1} (T^{-1} C T) S = S^{-1} T^{-1} (C) T S$$

$$= (T S)^{-1} C (T S)$$

$$= R^{-1} C R$$

إذن المصفوفة A متشابهة مع المصفوفة B .

من الخاصية (٢) يمكننا القول إن المصفوفتين A, B متشابهتان بدلاً من أن نقول إن A متشابهة مع B , B متشابهة مع A .

نجد من الخواص الثلاثة السابقة أن التشابه علاقة تكافؤ بين المصفوفات حيث إنها انعكاسية (عاكسة) – متماثلة (متناظرة) – ناقلة (متعدية)

نظرية (٨ ـ ٢) :

المصفوفات المتشابهة لها نفس الجذور المميزة

البرهان :

إذا كانت A, B مصفوفتين متشابهتين فإنه يوجد مصفوفة P قابلة للانعكاس بحيث إن :

$$B = P^{-1} A P$$

$$B - \lambda I = P^{-1} A P - \lambda I$$

$$= P^{-1} A P - P^{-1} \lambda I P$$

$$|B - \lambda I| = |P^{-1} A P - P^{-1} \lambda I P|$$

$$= |P^{-1} (A - \lambda I) P|$$

$$= |P^{-1}|\ |A - \lambda I|\ |P|$$

بما أن $|P^{-1}|\ |P| = 1$

إذن $|B - \lambda I| = |A - \lambda I|$

أي أن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة B هي نفس كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A وبالتالي يكون للمصفوفتان A , B نفس الجذور المميزة .

تعريـــف :

تعـرف المصفوفة المربـعة A بأنها **قابلـة للتحول إلـى الصورة القطريـــة** إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1} A P$ قطرية ويقال إن المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية .

تكون المصفوفة P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية للمصفوفة A وتكون المصفوفة القطرية $D = (\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n)$ هي الناتجة من $P^{-1} A P$ حيث $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .
(أي أن A , D متشابهتان) .

نظرية (٨-٣) :

إذا كانت A مصفوفة من النوع $n \times n$ فإنها تكون قابلة للتحول إلى الصورة القطرية إذا - وفقط إذا - كان لها عدد n من المتجهات غير المرتبطة (المستقلة) خطياً . وفي هذه الحالة تكون A متشابهة مع المصفوفة القطرية D والتي عناصرها القطرية هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

البرهان :

أولاً : نفرض أن A قابلة للتحول إلى الصورة القطرية . إذن توجد مصفوفة قابلة للانعكاس P التي على الصورة

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

بحيث إن

$$P^{-1} A P = D$$

حيث

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

إذن (1)

$$AP = PD$$

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

ويفرض $P_1 , P_2 , \dots , P_n$ ترمز لمتجهات أعمدة المصفوفة P فمن المعادلة (2) نجد أن الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هي $\lambda_1 P_1 , \lambda_2 P_2 , \dots , \lambda_n P_n$ ولكن مما سبق الأعمدة المتتابعة للمصفوفة AP هي $AP_1 , AP_2 , \dots , AP_n$ ولذلك يجب أن يكون

$$AP_1 = \lambda_1 P_1 \ , \ AP_2 = \lambda_2 P_2 \ , \ \dots \ , \ AP_n = \lambda_n P_n$$

$$i.e. \qquad AP_i = \lambda_i P_i \quad , \quad 1 \le i \le n \tag{3}$$

وبما أن P قابلة للانعكاس فإن متجهات أعمدتها تكون جميعها غير صفرية إذن من (3) تكون $\lambda_1, \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ قيماً ذاتية للمصفوفة A وتكون $P_1 , P_2 , \dots , P_n$ المتجهات الذاتية المناظرة وبما أن P غير قابلة للانعكاس فتكون متجهات أعمدتها مستقلة خطياً وبالتالي فإن للمصفوفة A عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً .

ثانياً : إذا افترضنا أن المصفوفة A لها عدد n من المتجهات الذاتية غير المرتبطة خطياً $P_1 , P_2 , \dots , P_n$ لقيم ذاتية مناظرة $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n$ ولتكن المصفوفة P هي المصفوفة التي متجهات الأعمدة لها هي $P_1 , P_2 , \dots , P_n$ وتكون أعمدة حاصل الضرب AP هي

$$AP_1 , AP_2 , \dots , AP_n$$

ولكن

$$AP_i = \lambda_i P_i \quad , \quad 1 \le i \le n$$

إذن

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD \tag{4}$$

حيث D هي المصفوفة القطرية التي عناصر قطرها الرئيسي هي القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. وحيث إن متجهات الأعمدة للمصفوفة A غير مرتبطة خطياً فإن P قابلة للانعكاس وبالتالي يمكن أن تكتب المعادلة (4) على الصورة

$$P^{-1} A P = D$$

أي أن المصفوفة A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

مثال (٨ ـ ٦) :

لإيجاد المصفوفة P القابلة للانعكاس بحيث تكون $P^{-1} A P$ قطرية حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

من مثال (٨ ـ ٣) نفرض P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية للمصفوفة A

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

مثال (٨ ـ ٧) :

لإيجاد المصفوفة P القابلة للانعكاس بحيث تكون $P^{-1} A P$ قطرية حيث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

من مثال (٨ ـ ٤) نفرض P هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات الذاتية للمصفوفة A

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

نظرية (٨ ـ ٤) :

إذا كانت المصفوفة A من النوع $n \times n$ لها عدد n من القيم الذاتية المختلفة ، فإن A تكون قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

البرهان :

نفرض أن $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$ هي القيم الذاتية المختلفة للمصفوفة A وأن $P = \{ P_1 , P_2 , \ldots , P_n \}$ هي مجموعة المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيم الذاتية المختلفة . نحاول إثبات أن P غير مرتبطة خطياً .

نفرض العكس أن P مرتبطة خطياً (من نتيجة سابقة) إذن يوجد متجه P_j يمثل تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات السابقة له في المجموعة P ،

وعليه يمكننا أن نفرض أن المجموعة $P` = \{P_1 , P_2 , \dots , P_{j-1}\}$ غير مرتبطة خطياً لأنه لو لم يتحقق ذلك فسيكون أحد متجهات هذه المجموعة تركيباً خطياً مع المتجهات السابقة له ويمكننا اختيار مجموعة جديدة وهكذا .

ولكن بفرض أنه $P`$ غير مرتبطة خطياً وأن P_j تركيب خطي مع متجهات هذه المجموعة أي أن

$$P_j = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_{j-1} P_{j-1} \qquad (1)$$

حيث $c_1 , c_2 , \dots , c_{j-1}$ أعداد حقيقية . بضرب طرفي (1) من اليسار بالمصفوفة A نحصل على

$$\begin{aligned} AP_j &= A (c_1 P_1 + c_2 P_2 + \dots + c_{j-1} P_{j-1}) \\ &= c_1 A P_1 + c_2 A P_2 + \dots + c_{j-1} A P_{j-1} \qquad (2) \end{aligned}$$

وبما أن $\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_j$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وأن $P_1 , P_2 ,$ $P_j , \dots$ هي المتجهات الذاتية المناظرة فإن :

$$AP_i = \lambda_i P_i \qquad , \qquad 1 \le i \le j$$

بالتعويض في (2) نحصل على

$$\lambda_j P_j = c_1 \lambda_1 P_1 + c_2 \lambda_2 P_2 + \dots + c_{j-1} \lambda_{j-1} P_{j-1} \qquad (3)$$

بضرب طرفي (1) في λ_j نحصل على

$$\lambda_j P_j = \lambda_j c_1 P_1 + \lambda_j c_2 P_2 + \dots + \lambda_j c_{j-1} P_{j-1} \qquad (4)$$

وبطرح (4) من (3) نحصل على

$$0 = c_1 (\lambda_1 - \lambda_j) P_1 + c_2 (\lambda_2 - \lambda_j) P_2 + \dots + c_{j-1} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) P_{j-1}$$

وحيث إن `P غير مرتبطة خطياً إذن

$$c_1(\lambda_1-\lambda_j)=0\ ,\ c_2(\lambda_2-\lambda_j)=0\ ,\ \dots\ ,\ c_{j-1}(\lambda_{j-1}-\lambda_j)=0$$

ولكن $(\lambda_1-\lambda_j)\neq 0\ ,\ (\lambda_2-\lambda_j)\neq 0\ ,\dots,\ (\lambda_{j-1}-\lambda_j)\neq 0$

لأن $\lambda_i\neq\lambda_j,\ 1\leq i\ ,\ j\leq n$ إذا كانت $i\neq j$ وهذا يؤدي إلى

$$c_1=0\ ,\ c_2=0\ ,\dots,\ c_{j-1}=0$$

ومن (1) نجد أن $P_j=0$ وهذا يتعارض لأن P_j أحد المتجهات الذاتية للمصفوفة A (المتجهات غير الصفرية) وبالتالي فإن P غير مرتبطة خطياً وباستخدام نظرية (٨ ـ ٣) نجد أن A قابلة للتحويل إلى الصورة القطرية .

ملاحظــة :

عكس نظرية (٨ ـ ٤) ليس صحيحاً حيث إنه يمكن تحويل المصفوفة إلى الصورة القطرية مع العلم بأن القيم الذاتية ليست جميعها مختلفة ففي حالة ما إذا كانت القيم الذاتية ليست جميعها مختلفة فإنه يمكن تحويل A إلى الصورة القطرية أو لا يمكن تحويلها .

حيث إن كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A يمكن أن تكتب على صورة حاصل ضرب n من العوامل كل منهم على الصورة $\lambda_0-\lambda$ حيث λ_0 جذر مميز لكثيرة الحدود المميزة . وحيث إن القيم الذاتية للمصفوفة A هي الجذور الحقيقية المختلفة لكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A .

فإنه يمكن كتابة كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A على الصورة

$$(\lambda_1-\lambda)^{k1}\ (\lambda_2-\lambda)^{k2}\ \dots\ (\lambda_r-\lambda)^{kr},$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ هي القيم الذاتية المختلفة للمصفوفة A . وأن $k_1, k_2, \ldots, k_r$ أعداد صحيحة مجموعها يساوي n $(\sum_{i=1}^{r} k_i = n)$ ويعرف العدد الصحيح k_i بأنه تكرار أو تضاعف λ_i . وبإمكاننا أن نثبت أنه إذا كانت جذور كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A جميعها حقيقية (وليست بالضرورة مختلفة) فإنه يمكن تحويل A إلى الصورة القطرية إذا كان لكل قيمة ذاتية ذات تكرار k يمكن أن نجد متجهات ذاتية غير مرتبطة خطية عددها k مناظرة لهذه القيمة الذاتية وهذا يعني أن فضاء حل النظام الخطي $(A - \lambda I_n) X = 0$ ذو بُعد k .

تعريـــف :

حيث إننا عرفنا فيما سبق أن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيمة الذاتية λ هي المتجهات غير الصفرية التي تحقق المعادلة $AX = \lambda X$ أو هي **المتجهات الذاتية غير الصفرية في فضاء حل المعادلة** $(A - \lambda I) X = 0$. كما يعرف فضاء الحل هذا **بالفضاء الذاتي للمصفوفة A المناظر للقيمة الذاتية** λ .

مثال (٨ ـ ٨) :

لإيجاد المصفوفة القابلة للانعكاس P بحيث تكون $P^{-1} A P$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المميزة هي

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

وكثيرة الحدود المميزة هي $f(\lambda) = (1-\lambda)(5-\lambda)^2$

الجذور المميزة هي $\lambda_1 = 5 \;,\; \lambda_2 = 5 \;,\; \lambda_3 = 1$

إذن القيم الذاتية للمصفوفة هي $\lambda_1 = 5 \;,\; \lambda_2 = 1$

حيث $\lambda_1 = 5$ قيمة ذاتية مكررة وتكرارها = 2

ولإيجاد المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة $\lambda_1 = 5$

نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل هذا النظام هو $\begin{bmatrix} -s \\ s \\ r \end{bmatrix}$ حيث s, r أعداد حقيقية

لذلك فإن المتجهات الذاتية للمصفوفة A المناظرة لقيمة $\lambda = 5$ هي

المتجهات غير الصفرية التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وحيث إن $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; P_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ غير مرتبطين خطياً

فإنهما يمثلان المتجهات الذاتية المناظرة للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 5$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 1$

نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r . ولذلك فإن $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المناظر لقيمة $\lambda_2 = 1$.

إذن المصفوفة $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية حيث

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

مثال (٨-٩) :

أوجد مصفوفة P التي تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية

حيث
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المميزة هي
$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

وكثيرة الحدود المميزة $f(\lambda) = |A - \lambda I_3| = (-\lambda)\ (1-\lambda)^2$

الجذور المميزة هي $\lambda_1 = 1\ ,\ \lambda_2 = 1\ ,\ \lambda_3 = 0$

إذن القيم الذاتية للمصفوفة A هي $\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 0$

حيث $\lambda_1 = 1$ قيمة ذاتية مكررة وتكرارها = 2

لإيجاد المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة $\lambda_1 = 1$

نفرض النظام المتجانس
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أنه $\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r .

أي أنه لا يوجد متجهان ذاتيان غير مرتبطين خطياً وبالتالي فإنه لا يمكن تحويل A إلى الصورة القطرية

مثال (٨ـ١٠) :

أوجد أساسات وبُعد الفضاءات الذاتية لكل من المصفوفات المذكورة في الأمثلة (٨ – ٣) ، (٨ – ٤) ، (٨ – ٨) .

من مثال (٨ ـ ٣) نجد أن $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 5$ وبُعده يساوي 1 .

$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$ وبُعده يساوي 1 .

من مثال (٨ ـ ٤) نجد أن $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ وبُعده يساوي 1 .

$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 2$ وبُعده يساوي 1 .

$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$ وبُعده يساوي 1 .

من مثال (٨ ـ ٨) نجد أن $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

يكونان أساساً للفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 5$ وبعده يساوي 2 .

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هو أساس الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 1$ وبُعده يساوي 1 .

تمـــاريـــن (٨)

١ - أوجد المصفوفة المميزة وكثيرة الحدود المميزة والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات التالية

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (x) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ (xii) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

(xiii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

٢ - أوجد لكل مصفوفة A من المصفوفات التالية - إن أمكن - المصفوفة P القابلة للانعكاس بحيث $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية

(i) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ (viii) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(ix) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (x) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(xi) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (xii) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(xiii) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

٣ - أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفات في تمرين (٨ ـ ١) إن أمكن .

٤ - أوجد أساسات الفضاءات الذاتية للمصفوفات في تمرين (٨ - ٢) إن أمكن .

الباب التاسع

تطبيقات هندسية

GEOMETRIC APPLICATIONS

الباب التاسع

تطبيقات هندسية

Geometric Applications

الجبر الخطي أحد فروع الرياضيات الهامة الذي يتميز بالعديد من التطبيقات في مجالات العلوم المختلفة مثل الرياضيات ـ الفيزياء ـ العلوم البيولوجية ـ العلوم الاجتماعية ـ العلوم الإدارية ـ العلوم التجارية والعلوم الاقتصادية . لكننا سنركز اهتمامنا في هذا الباب على دراسة التطبيقات الهندسية ، حيث نستعرض هذه التطبيقات من خلال مفاهيم الجبر الخطي لبعض موضوعات الهندسة التحليلية .

أولاً المستقيمات والمستويات في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$

[متطلبات هذا الجزء دراسة المحددات ـ المتجهات ـ الفضاءات المتجهة]

نتناول في هذا الجزء دراسة بعض الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم في $\mathbb{R}^3$ وكذلك بعض الصور المختلفة لمعادلة المستوى في $\mathbb{R}^3$.

المستقيمات في $\mathbb{R}^2$:

معادلة الخط المستقيم في المستوى $\mathbb{R}^2$ بمعلومية نقطتين عليه :

الصورة العامة لمعادلة المستقيم في المستوى

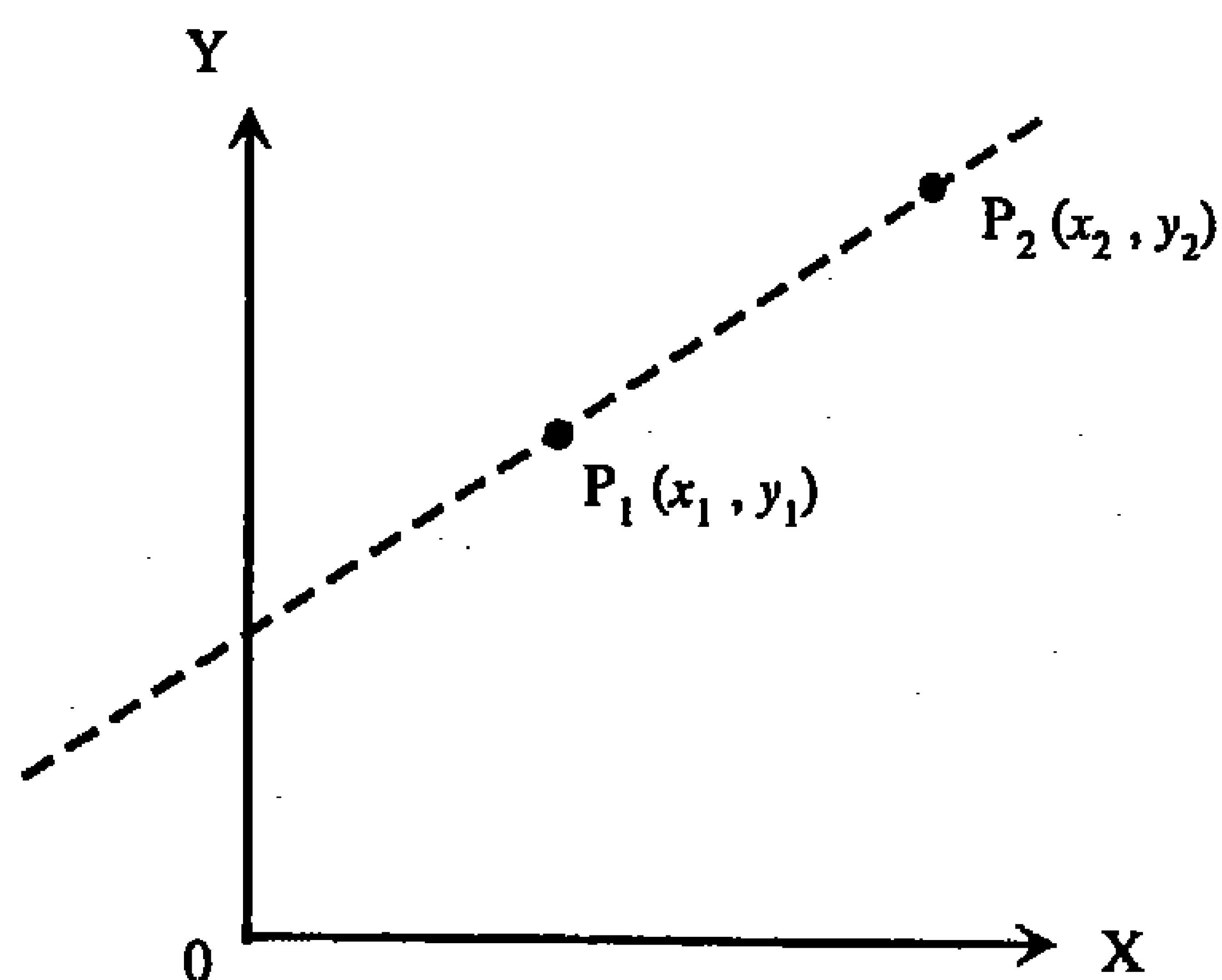
$$a\,x + by + c = 0 \qquad (1)$$

حيث $a \neq 0\ ,\ b \neq 0 \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

أي نقطتين $P_2(x_2, y_2)$ ، $P_1(x_1, y_1)$ تقعان على هذا المستقيم ، تحققان المعادلة (1) ، إذن

$$a_1 x + b_1 y + c = 0 \qquad (2)$$

$$a_2 x + b_2 y + c = 0 \qquad (3)$$



بكتابة المعادلات (1), (2), (3) كنظام خطي في المجاهيل a, b, c

نحصل على

$$x\ a + y\ b + c = 0$$
$$x_1 a + y_1 b + c = 0$$
$$x_2 a + y_2 b + c = 0$$

يمكن أن نعبرعن هذا النظام من المعادلات المتجانسة في الصورة المصفوفية التالية

$$\begin{bmatrix} x & x & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو بصورة مختصرة $A\,X = 0$

يكون لهذا النظام حل غير صفري إذا – وفقط إذا – كان $|A| = 0$ ، أي أن

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

المعادلة (4) تمثل خطاً مستقيماً ماراً بالنقطتين $P_1 (x_1 , y_1)$, $P_2 (x_2 , y_2)$

مثال (٩ ـ ١) :

معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $P_2 (4, 6)$ و $P_1 (-1 , 3)$ يمكن الحصول عليها بالتعويض في (4)

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

بفك هذا المحدد نحصل على معادلة الخط المستقيم المطلوبة

$$3x - 5y + 18 = 0$$

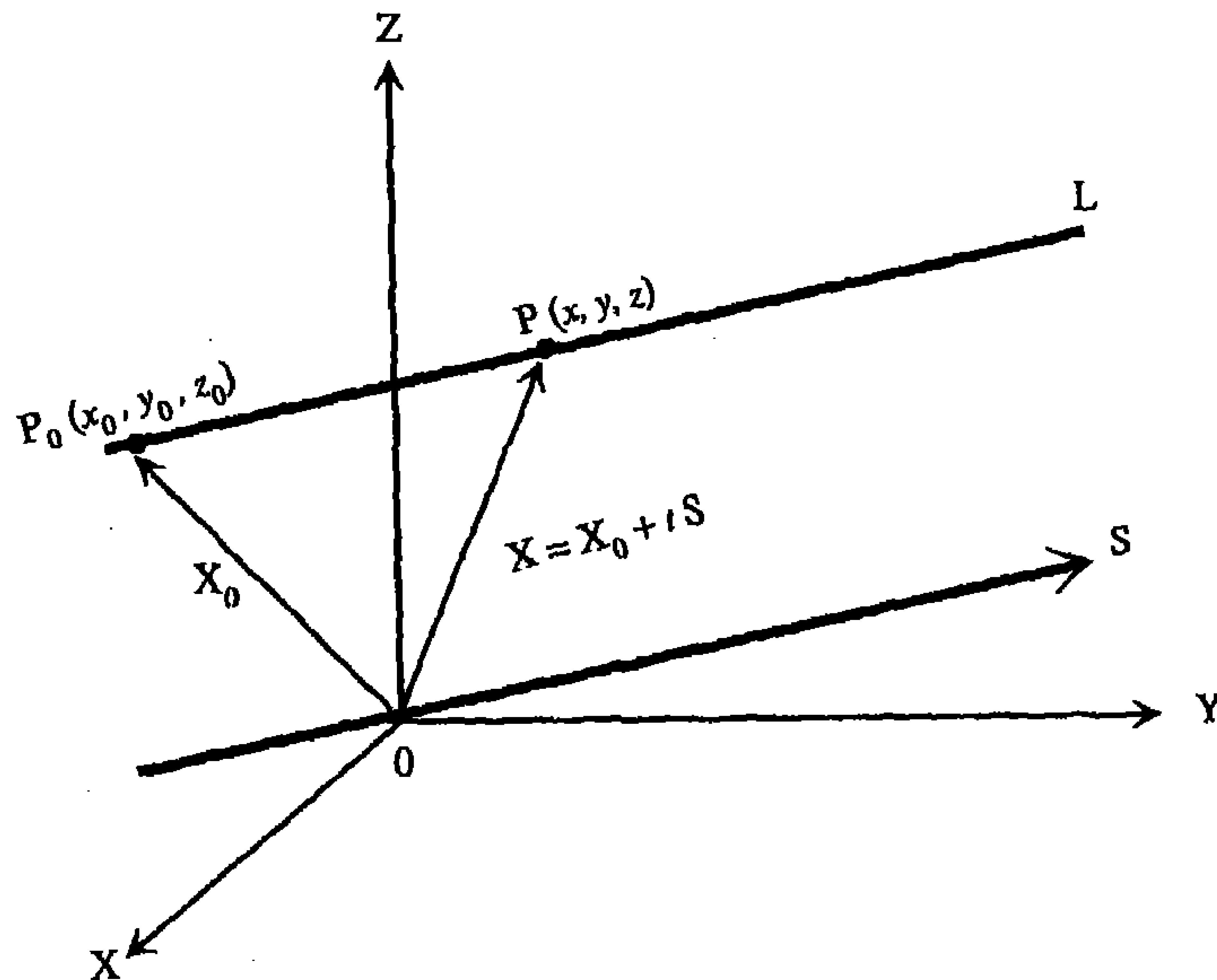
المستقيمات في $\mathbb{R}^3$

١ – المعادلة البارامترية للمستقيم في الفضاء $\mathbb{R}^3$

نعلم أن المستقيم في المستوى $\mathbb{R}^2$ يُعيّن بمعلومية ميله ونقطة عليه أما في الفضاء $\mathbb{R}^3$ ، فيُعيّن المستقيم بمعلومية اتجاهه ونقطة عليه .

نفرض $S = (a, b, c)$ متجهاً غير صفري في $\mathbb{R}^3$. حيث إن $P_0 (x_0 , y_0 , z_0)$ أي نقطة في $\mathbb{R}^3$ ، والتي متجه موضعها X_0 .

إذن أي مستقيم L مار بالنقطة P_0 وموازياً للمتجه S ، يتكون من النقط $P(x, y, z)$ والتي متجه موضعها X .



بما أن $\overrightarrow{P_0P}$ يوازي S ، إذن يوجد عدد حقيقي t حيث $\overrightarrow{P_0P} = t\,S$

من مثلث المتجهات $0P_0P$ $\quad X = X_0 + \overrightarrow{P_0P}$

$$X = X_0 + t\,S \qquad (5)$$

المعادلة (5) تسمى **المعادلة البارامترية للمستقيم L في $\mathbb{R}^3$** ، نسبةً إلى **البارامتر (المتغير الحقيقي)** t .

بكتابة المعادلة الاتجاهية (5) بدلالة المركبات نحصل على

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t\,a \\ y &= y_0 + t\,b \qquad (-\infty < t < \infty) \\ z &= z_0 + t\,c \end{aligned} \qquad (6)$$

تسمى (6) **المعادلات البارامترية للمستقيم في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$**

مثال (٩ ـ ٢) :

المعـادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $P_0(-3, 2, 1)$ والموازي للمتجه $S = (2, -3, 4)$ يمكن الحصول عليها بالتعويض في (6) .

$$x = -3 + 2t$$
$$y = 2 - 3t \qquad (-\infty < t < \infty)$$
$$z = 1 + 4t$$

مثال (٩ ـ ٣) :

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطتين

$$P_0(2, 3, -4) \quad , \quad P_1(3, -2, 5)$$

بفرض S هو المتجه الموازي للمتجه $\overrightarrow{P_0P_1}$

إذن
$$S = \big(3-2, -2-3, 5-(-4)\big)$$
$$= (1, -5, 9)$$

بالتعويض في (6) نحصل على

$$x = 2 + t$$
$$y = 3 - 5t \qquad (-\infty < t < \infty)$$
$$z = -4 + 9t$$

٢ – الصورة المتماثلة للخط المستقيم في $\mathbb{R}^3$:

بحل نظام المعادلات (6) (أي بحذف البارامتر t) حيث كل من a, b, c لا تساوي الصفر نحصل على

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \qquad (7)$$

المعادلة (7) تسمى **الصورة المتماثلة** للمستقيم المار بالنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ والموازي للمتجه $S = (a, b, c)$.

مثال (٩ ـ ٤) :

في مثال (٩ ـ ٣) معادلة المستقيم في الصورة المتماثلة تكون

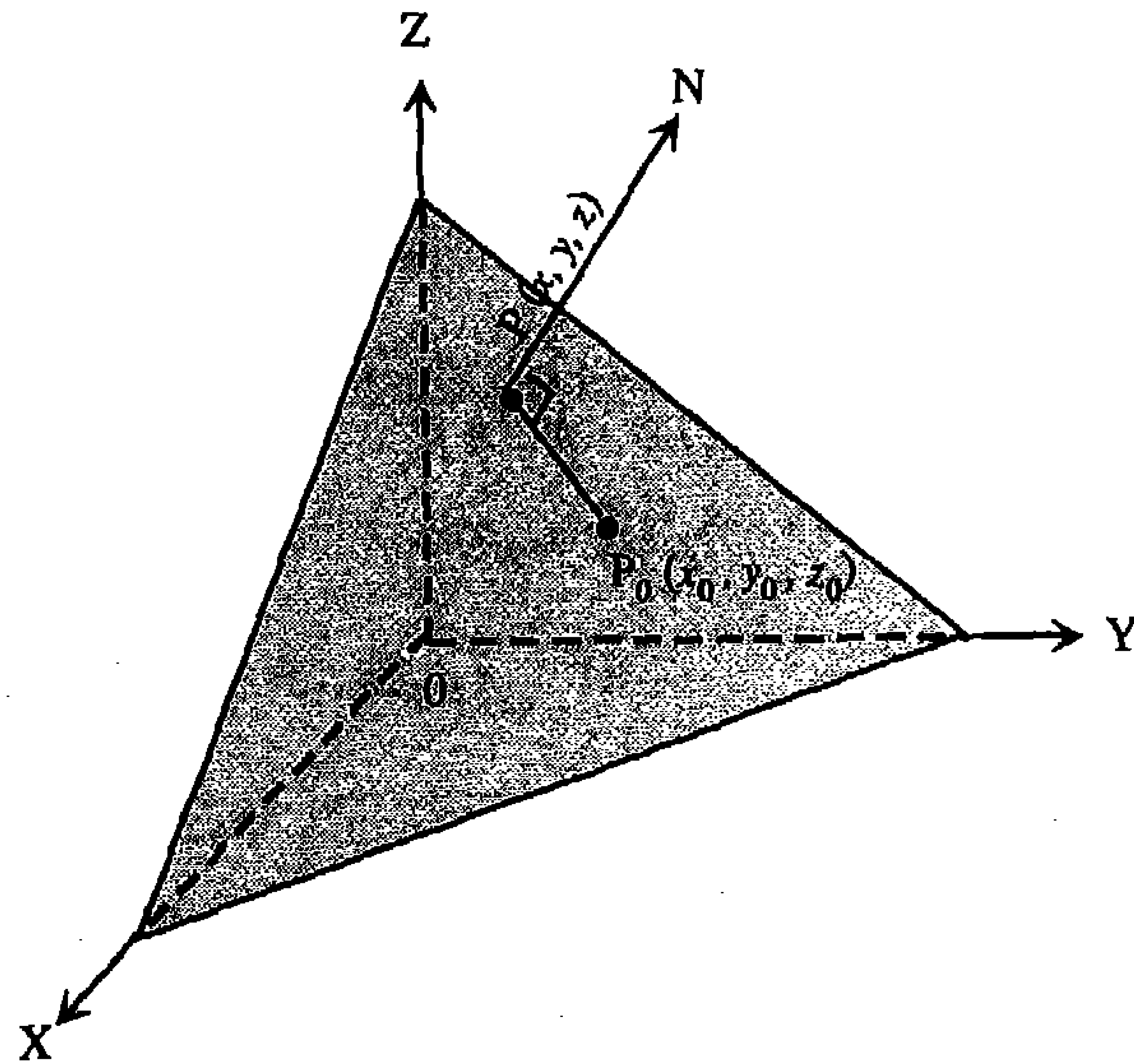
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+4}{9}$$

المستويات في $\mathbb{R}^3$

١ - معادلة المستوى بمعلومية نقطة والعمودي عليه

المستوى يُعيَّن تماماً بمعلومية نقطة في المستوى ومتجه متعامد عليه يعرف **بالمتجه العمودي .**

نفرض $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة في المستوى ، وليكن $N = (a, b, c)$ هو المتجه العمودي على المستوى .



أي نقطة $P(x, y, z)$ تقع في المستوى إذا - وفقط إذا - كان المتجه $\overrightarrow{P_0 P}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ عمودياً على N .

أي أنها تقع في المستوى إذا - وفقط إذا - كان $N.\overrightarrow{P_0P} = 0$

$$(a, b, c) . (x-x_0 , y-y_0 , z-z_0) = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \qquad (8)$$

تمثل (8) معادلة مستوى بمعلومية النقطة $P_0(x_0 , y_0 , z_0)$ والعمودي عليه $N = (a, b, c)$

مثال (٩ - ٥) :

معادلة المستوى المار بالنقطة $(3, 4, -3)$ والعمودي على المتجه $N = (5, -2, 4)$

يمكن الحصول عليها بالتعويض في (8)

$$5(x-3) - 2(y-4) + 4(z+3) = 0$$

$$5x - 2y + 4z + 5 = 0$$

مثال (٩ - ٦) :

أوجد معادلة المستوى المار بالنقط الثلاث التالية

$$P_1(2, -2, 1) \quad , \quad P_2(-1, 0, 3) \quad , \quad P_3(5, -3, 4)$$

لتعيين المتجه العمودي على هذا المستوى نوجد المتجهين

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 2, 2) \quad , \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (3, -1, 3)$$

حيث $\overrightarrow{P_1P_2}$ لا يوازي $\overrightarrow{P_1P_3}$ فيكون المتجه العمودي على المستوى N

$$N = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (8, 15, -3)$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى بمعلومية النقطة $P_1\ (2, -2, 1)$ والعمودي عليه N .

$$8\ (x-2) + 15\ \big(y-(-2)\big) + (-3)\ (z-1) = 0$$

$$8\,x + 15\,y - 3\,z + 17 = 0$$

٢ – الصورة العامة لمعادلة المستوى:

بكتابة المعادلة (8) على الصورة :

$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

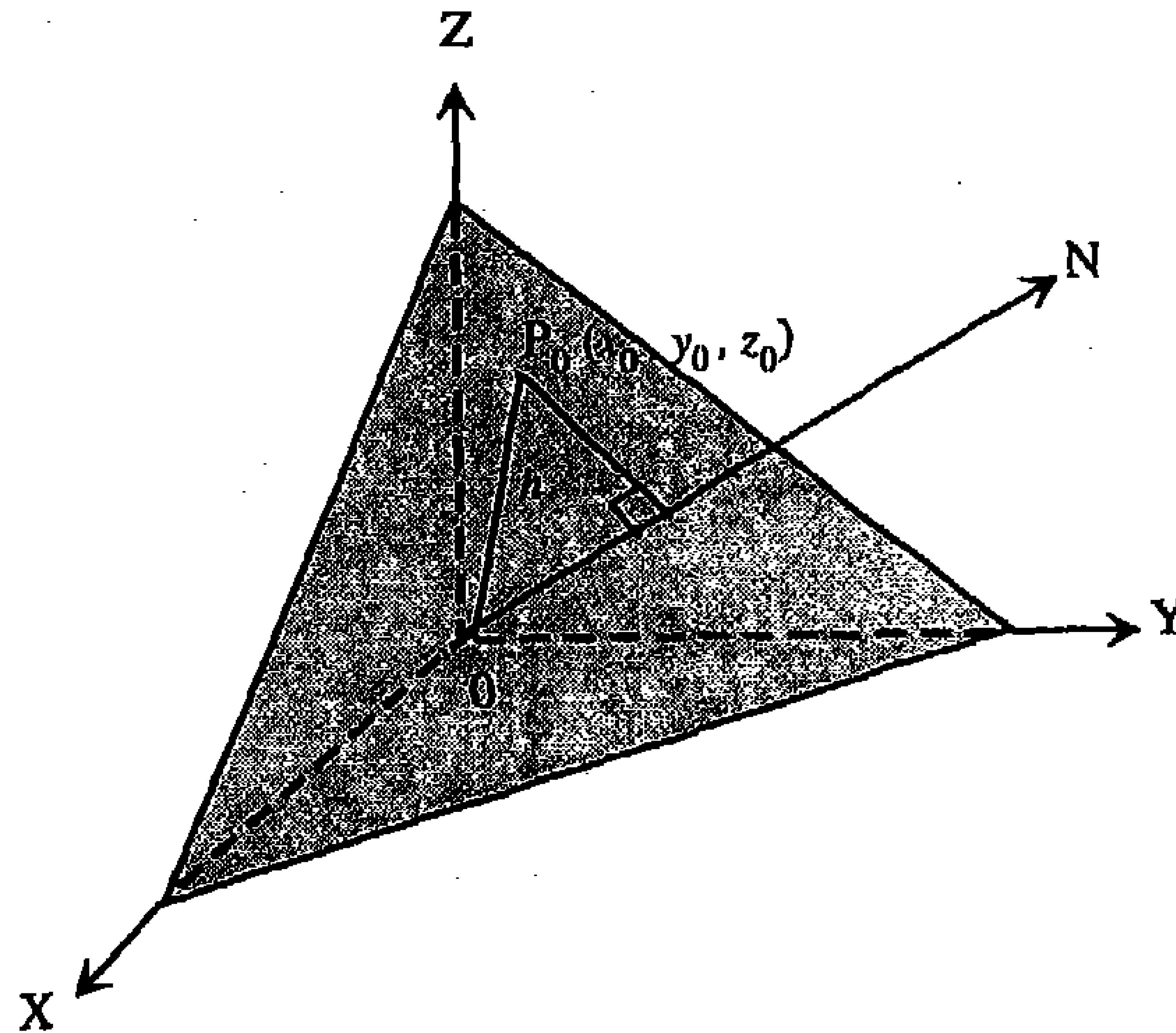
نحصل على :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (9)$$

حيث

$$d = -(\,ax_0 + by_0 + cz_0) \qquad (10)$$

تعرف المعادلة (9) بالصورة العامة لمعادلة المستوى . حيث يمكن توضيح المفهوم الهندسي للعدد d باستخدام جبر المتجهات كالتالي



بما أن $N = (a, b, c)$

إذن متجه الوحدة
$$\hat{N} = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ويكون
$$|h| = \hat{N} . \overrightarrow{0P_0}$$

$$= \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} . (x_0, y_0, z_0)$$

$$= \frac{ax_0 + by_0 + cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

حيث $|h|$ طول العمود الساقط من مركز الإحداثيات 0 على المستوى .

إذن
$$|d| = ax_0 + by_0 + cz_0$$
$$= |h| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

أي أن $|d|$ يساوي طول العمود الساقط من المركز 0 على المستوى مضروباً في طول المتجه العمودي N .

(٣) معادلة المستوى بمعلومية ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة :

إذا كانت $P_1 (x_1 , y_1 , z_1) , P_2 (x_2 , y_2 , z_2) , P_3 (x_3 , y_3 , z_3)$ أي ثلاث نقط في المستوى ؛ فإن إحداثيات كل منها تحقق الصورة العامة لمعادلة المستوى (9) .

أي أن
$$x\ a + y\ b + z\ c + d = 0$$
$$x_1a + y_1b + z_1c + d = 0$$
$$x_2a + y_2b + z_2c + d = 0$$
$$x_3a + y_3b + z_3c + d = 0$$

يمكن أن نعبر عن هذا النظام من المعادلات المتجانسة في الصورة المصفوفية التالية

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو بصورة مختصرة $\quad AX = 0$

يكون لهذا النظام حل غير صفري إذا - وفقط إذا - كان $\quad |A| = 0$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (11)$$

مثال (٩ ـ ٧) :

معادلة المستوى المار بالنقط الثلاث P_1 , P_2 , P_3 في مثال (٩ ـ ٦)

يمكن الحصول عليها بالتعويض في (11)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

إذن $\quad 8x + 15y - 3z + 17 = 0$

(٤) تقاطع مستويين :

بتجزيء الصورة المتماثلة لمعادلة الخط المستقيم (7) نحصل على الصورة

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \quad , \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

حيث تمثل كل منها معادلة مستوى ويكون خط تقاطع هذين المستويين هو المستقيم الذي تمثله المعادلة (7) في صورتها المتماثلة أو المعادلة (6) في صورتها البارامترية .

مثال (٩ـ٨)

أوجد معادلة مستويين بحيث يكون خط تقاطعهما هو المستقيم

$$\begin{aligned} x &= -2+3t \\ y &= 3-2t \qquad (-\infty < t < \infty) \\ z &= 5+4t \end{aligned}$$

بتحويل معادلة المستقيم من الصورة البارامترية إلى الصورة المتماثلة

إذن $$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{4}$$

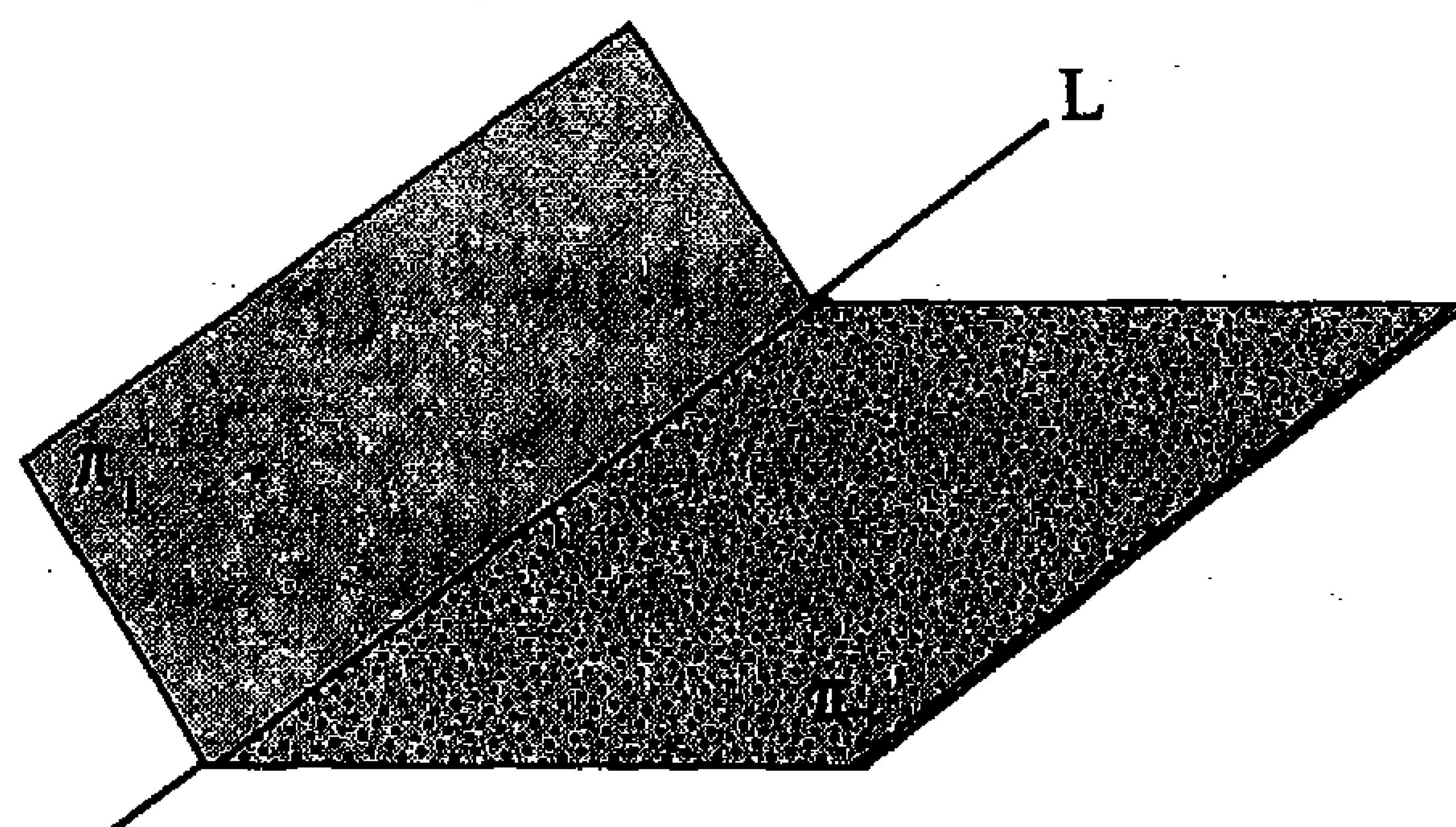
بتجزيء هذه المعادلة نحصل على المعادلتين

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} \quad ، \quad \frac{x+2}{3} = \frac{z-5}{4}$$

فيكون المستقيم L هو خط تقاطع المستويين

$$\pi_1 : 2x+3y-5=0$$

$$\pi_2 : 4x-3z+23=0$$



ثانياً : الصيغ التربيعية :

[متطلبات هذا الجزء دراسة تحويل المصفوفات المتماثلة إلى الصورة القطرية]

الصيغ التربيعية في n من المتغيرات تلعب دوراً هاماً فهي تظهر في تطبيقات مختلفة في شتى العلوم مثل الميكانيكا والإحصاء والنظرية النسبية والفروع المختلفة في الفيزياء .

في هذا الجزء سوف ندرس الصيغ التربيعية في الفضائين $\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3$ من خلال تحويل المصفوفات المتماثلة لهذه الصيغ إلى الصورة القطرية .

الصيغة التربيعية في $\mathbb{R}^2$ تمثلها المعادلة التالية

$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 = d \qquad (1)$$

حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ، تسمى **الصيغة التربيعية في المتغيرين x , y** وهي تمثل قطوع مخروطية مركزها نقطة الأصل منسوبة للإحداثيات الكارتيزية في المستوى $\mathbb{R}^2$.

الصيغة التربيعية في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$ تمثلها المعادلة التالية

$$a x^2 + 2 d x y + 2 e x z + b y^2 + 2 f y z + c z^2 = k \qquad (2)$$

حيث $a, b, c, d, e, f, k \in \mathbb{R}$ وتمثل المعادلة (2) سطح من الدرجة الثانية مركزه نقطة الأصل منسوبة للإحداثيات الكارتيزية في الفضاء $\mathbb{R}^3$.

التعرف على القطوع المخروطية ومعادلات السطوح من الدرجة الثانية يتطلب تحويل الإحداثيات باستخدام دوران وانتقال المحاور مما يتطلب تطبيقات القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفات المتماثلة عند تحويلها إلى الصورة القطرية .

تعريـــف :

إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن الدالة $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ والمعرفة بالقاعدة :

$$F(X) = X^T A X \qquad (3)$$

حيث

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

تعرف بالصيغة التربيعية في n من المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ وتسمى المصفوفة المتماثلة A **مصفوفة الصيغة التربيعية** F (X)

مثال (٩ ـ ٩) :

اكتب المعادلتين (1), (2) كصيغة تربيعية

يمكننا التعبير عن كل من المعادلتين (1), (2) في الصيغة التربيعية كالتالي

في المعادلة (1) نضع $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

إذن المصفوفة A تأخذ الصورة $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

فيكون الطرف الأيسر في (1) على الصورة

$$F(X) = X^T A X$$

$$F(X) = [x \quad y] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

وهي الصيغة التربيعية المطلوبة في المتغيرين x, y .

بالمثل المعادلة (2) يمكن كتابتها في الصيغة التربيعية بوضع

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

إذن

$$A = \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}$$

وتكون الصيغة التربيعية في المتغيرات الثلاث x, y, z هي

$$F(X) = X^T A X$$

$$= [x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

مثال (٩-١٠):

اكتب التعبيرات التالية في صورة الصيغة التربيعية :

(i) $3x^2 - 5xy - 7y^2$

(ii) $3x^2 - 7xy + 5xz + 4y^2 - 4yz - 3z^2$

(i) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-5}{2} & -7 \end{bmatrix}$

إذن الصيغة التربيعية المناظرة هي

$$F(X) = [x \quad y] \begin{bmatrix} 3 & \frac{-5}{2} \\ \frac{-5}{2} & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

(ii) $$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-7}{2} & 4 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

إذن الصيغة التربيعية المناظرة هي

$$F(X) = [\,x \quad y \quad z\,] \begin{bmatrix} 3 & \frac{-7}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{-7}{2} & 4 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

تعريــف :

يقال للمصفوفتين المربعيتن A , B إنهما متكافئتين إذا كان

$$A = P^T\ B\ P$$

لأي مصفوفة غير صفريـة P .

تعريــف :

الصيغتان التربيعيتـان F (X), H (X`) متكافئتين إذا كـانت المصفوفتـان المصاحبتان A , B على الترتيب متكافئتين

ذكرنا في بداية هذا الجزء أن الصيغة التربيعية في متغيرين x , y (1) تمثل قطوع مخروطية (زائد ـ ناقص ـ مكافئ ـ دائرة) وكذلك الصيغة التربيعية في المتغيرات الثلاث x, y, z (2) تمثل سطوح من الدرجة الثانية وللتعرف على أي قطع مخروطي أو سطح من الدرجة الثانية تمثله الصيغة التربيعية ، لا بد من تبسيط هذه الصيغ باتباع الخطوات التالية :

١ - نكتب المعادلة على صورة الصيغة التربيعية $F(X) = X^T A X$

٢ - نوجد المصفوفة العمودية P (التي أعمدتها المتجهات الذاتية المتعامدة المُعيارية للمصفوفة A) التي تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية وذلك بإيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A مع ملاحظة أن $|P| = 1$

٣ - نبدل نظام الإحداثيات القديم $X = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$

إلى نظام جديد من الإحداثيات $X` = (x`_1 , x`_2 , \dots , x`_n)$

حيث $X = P X`$

٤ - يمكننا كتابة الصيغة التربيعية $F(X)$ كالتالي :

$$\begin{aligned} F(X) &= X^T A X \\ &= (P X`)^T A (P X`) \\ &= X`^T (P^T A P) X` \\ &= X`^T B X` = H(X`) \end{aligned}$$

حيث $B = P^T A P$

بما أن P مصفوفة غير صفرية نستنتج أن $F(X) , H(X`)$ صيغتان تربيعيتان متكافئتان .

مثال (٩ ـ ١١) :

أوجد صيغة تربيعية متكافئة للصيغة التربيعية

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$$

بكتابة الصيغة على الصورة المصفوفية

$$F(X) = [x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A حيث $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_2 = 3 \ , \ \lambda_1 = 1$

نوجد المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية بحل النظام المتجانس

$$(A - \lambda I_2) X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

نفرض $x_1 = x_2 = 1$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 3$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نفرض $x_1 = 1 \leftarrow x_2 = -1$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 1$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

بتحويل المتجهان P_1 , P_2 إلى متجهين متعامدين مُعياريين

$$N_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة العمودية P والتي أعمدتها المتجهين المستقلين N_1 , N_2

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

إذن
$$P^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بوضع
$$X = P X`$$

حيث
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad X` = \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$X^T A X = (PX`)^T A (P X`)$$
$$= X`^T (P^T A P) X`$$
$$= [x` \quad y`] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$
$$= [3x` \quad y`] \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$
$$= 3x`^2 + y`^2$$

إذن الصيغة التربيعية المطلوبة هي $3x`^2 + y`^2 = 9$

أو
$$\frac{x`^2}{3} + \frac{y`^2}{9} = 1$$

وهي تمثل معادلة قطع ناقص

مثال (٩ ـ ١٢) :

أوجد صيغة تربيعية مكافئة للصيغة التربيعية

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1$$

بكتابة الصيغة على الصورة المصفوفية

$$[x \quad y \quad z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1$$

حيث المصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

نوجد المتجهات الذاتية المناظرة للقيم الذاتية بحل النظام المتجانس

$$(A - \lambda I_3)X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_1 اختياري ، $x_2 + x_3 = 0 \rightarrow x_2 = -x_3$

إذن المتجه المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

بوضع $x_1 = 0 , x_2 = 1 \rightarrow x_3 = -1$

والمتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 1$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(نختار P_2 بحيث يكون مستقلاً مع P_1)

عندما $\lambda = \lambda_3 = 3$ $\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3 & 1 \\ 0 & 1 & 2-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

أي أن $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x_1 = 0$$
$$-x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$x_2 = x_3$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 3$ هو $P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

بكتابة المتجهات الذاتية في الصورة المعيارية

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تكون المصفوفة العمودية P حيث أعمدتها هي المتجهات الذاتية المتعامدة المُعيارية السابقة

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad |P| = 1$$

ويكون

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بوضع $X = PX`$ حيث

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad X` = \begin{bmatrix} x` \\ y` \\ z` \end{bmatrix}$$

إذن الصيغة التربيعية

$$F(X) = X^T AX$$

$$= X^{`T} P^T A P X`$$

$$= [\, x` \ y` \ z` \,] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \\ z` \end{bmatrix}$$

$$= x^{`2} + y^{`2} + 3\, z^{`2}$$

وتكون الصيغة التربيعية المكافئة هي

$$x^{`2} + y^{`2} + 3\, z^{`2} = 1$$

في المثالين السابقين ، يلاحظ أننا لم نستخدم المتجهات الذاتية للمصفوفة A وبالتالي لم نستخدم المصفوفة P عند إيجاد الصيغة التربيعية المكافئة فقط وإنما نحتاج بالتحديد للقيم الذاتية للمصفوفة A والنظرية التالية توضح ذلك :

نظرية (٩ ـ ١) : (نظرية المحاور الرئيسية)

أي صيغة تربيعية في n من المتغيرات

$$F(X) = X^T A X$$

تكافئ ـ بمساعدة مصفوفة عمودية P ـ الصيغة التربيعية التالية

$$H(X`) = \lambda_1 x`^2_1 + \lambda_2 x`^2_2 + \ldots + \lambda_n x`^2_n$$

حيث $X` = \begin{bmatrix} x`_1 \\ x`_2 \\ \vdots \\ x`_n \end{bmatrix}$ ، $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

البرهان:

إذا كانت A هي المصفوفة المصاحبة للصيغة التربيعية F X فإن A تكون متماثلة . وبالتالي يمكن تحويلها إلى الصورة القطرية باستخدام مصفوفة عمودية P حيث تكون $D = P^{-1} A P$ مصفوفة قطرية .

بما أن P عمودية إذن $P^{-1} = P^T$

أي أن $D = P^T A P$

وتكون عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة D هي القيم الذاتية للمصفوفة A

أي $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots , \lambda_n$

$$\begin{aligned} H(X`) &= X`^T (P^T A P) X` \\ &= X`^T D X` \\ &= \lambda_1 x`_2 + \lambda_2 x`_2 + \ldots + \lambda_n x`_n^2 \end{aligned}$$

ومن تعريف تكافؤ الصيغ التربيعية حيث كل A , D مصفوفتان متكافئتان

نجد أن $F(X) = H(X`)$

مثال (٩ ـ ١٣) :

أوجد صيغة تربيعية تكافئ الصيغة التربيعية

$$F(X) = 2x^2 + 4y^2 + 6yz - 4z^2$$

$$F(X) = X^T A X \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (2-\lambda) [(4-\lambda)(-4-\lambda) - 9] \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 25) \\ &= (2-\lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0 \end{aligned}$$

إذن القيم الذاتية هي

$$\lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = -5$$

بتطبيق نظرية المحاور الرئيسية تحصل على الصيغة التربيعية المكافئة التالية

$$\begin{aligned} H(X`) &= \lambda_1\, x`^2 + \lambda_2\, y`^2 + \lambda_3\, z`^2 \\ &= 2x`^2 + 5y`^2 - 5\, z`^2 \end{aligned}$$

المفهوم الهندسي لنظرية المحاور الرئيسية

١ - بالنسبة للصيغة التربيعية في متغيرين x , y (1) والتي تمثل أحد القطوع المخروطية (ناقص - زائد - مكافئ - دائرة) في الصورة الغير قياسية لاحتوائها الحد $x y$.

فإن نظرية المحاور الرئيسية تعني وجود نظام إحداثيات $X` , Y`$ بحيث إذا نُسبت إليه الصيغة التربيعية فإنها تأخذ الصورة القياسية التالية

$$a`\, x`^2 + b`\, y`^2 = 1 \qquad (1)`$$

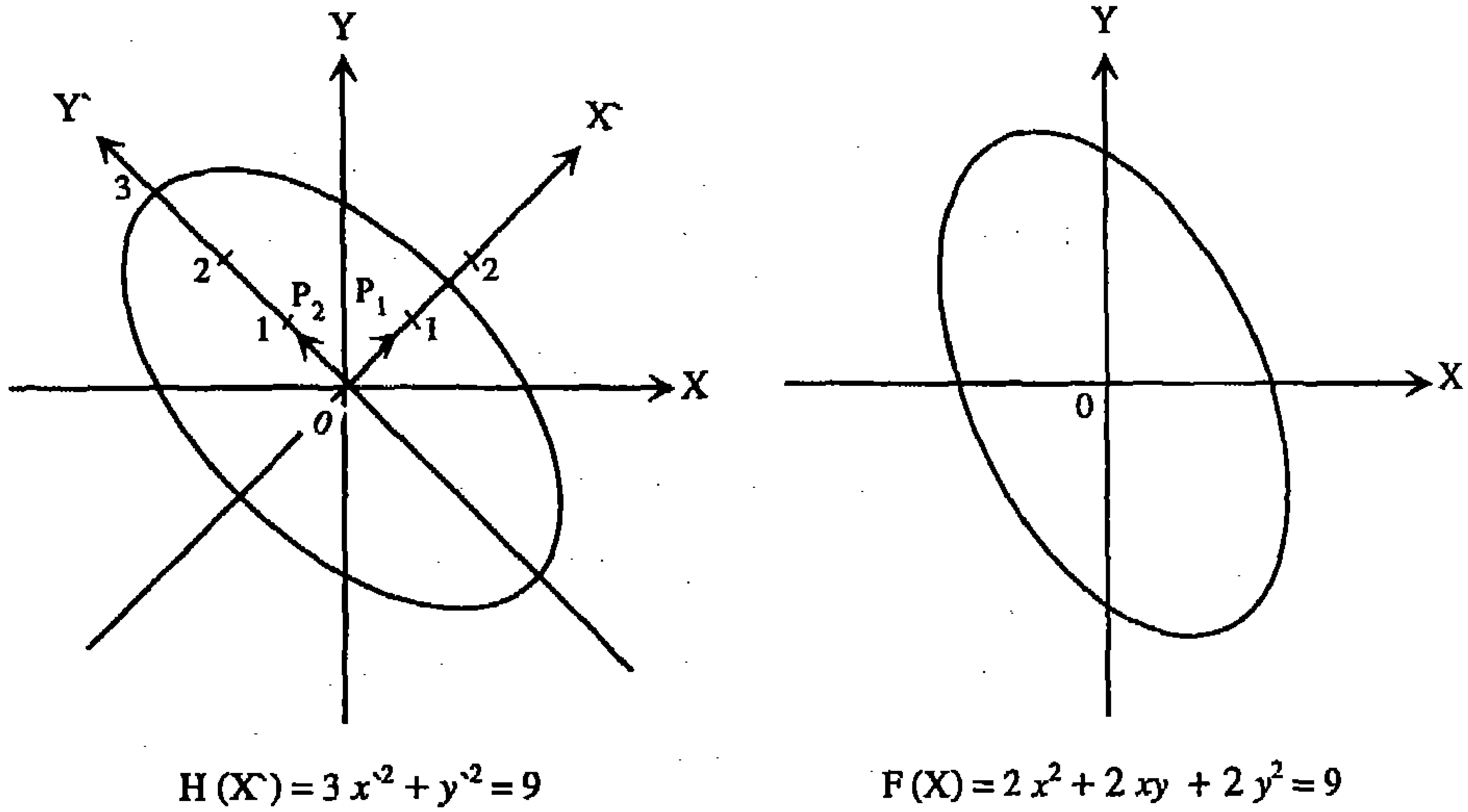
يوجد ارتباط قوي بين المتجهات الذاتية للمصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية $F(X) = X^T AX$ وبين وضع المحاور الجديدة $X`$ , $Y`$ حيث تكون اتجاهات المحاور الجديدة $X` , Y`$ على امتداد المتجهات الذاتية P_1 , P_2 للمصفوفة A .

٢ - بالمثل تماماً بالنسبة للصيغة التربيعية في المتغيرات الثلاث x, y, z (2) والتي تمثل سطوح من الدرجة الثانية مركزها نقطة الأصل للإحداثيات X , Y , Z في الفضاء $\mathbb{R}^3$ فإن نظرية المحاور الرئيسية تعني وجود نظام إحداثيات جديد في الفضاء $\mathbb{R}^3$ هو $X` , Y` , Z`$ بحيث إذا أُديرت المحاور القديمة إليه ، اختُزلت المعادلة إلى الصورة القياسية التالية

$$a`x`^2 + b`y`^2 + c`z`^2 = 1 \qquad (2)`$$

وفي كلتا الحالتين سواء في $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ فإن المحاور الرئيسية للقطوع المخروطية أو السطوح من الدرجة الثانية تقع على امتداد نظام الإحداثيات الجديد الذي بدوره يقع على امتداد المتجهات الذاتية لمصفوفة الصيغة التربيعية المتماثلة A .

ففي المثال (٩ ـ ١١) نلاحظ أن الصيغة التربيعية F (X) منسوبة لنظام الإحداثيات X , Y لا تكون في الصورة القياسية في حين أن الصيغة التربيعية المكافئة H (X`) منسوبة لنظام الإحداثيات X` , Y` الناتج من دوران X , Y تكون في الصورة القياسية حيث X` , Y` يكونان على امتداد المتجهات الذاتية للمصفوفة A .



$H(X`) = 3x`^2 + y`^2 = 9$ $\qquad$ $F(X) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$

نلاحظ مما سبق أن مصفوفة التحويل العمودي P هي المسؤولة عن تحويل الصيغ التربيعية (2) , (1) إلى الصورة `(2) , `(1) على الترتيب أي أن P هي المولدة للمحاور الجديدة X` , Y` وذلك بتحديد اتجاهات هذه المحاور الجديدة والتي تدار إليها المحاور القديمة X , Y .

ملاحظات :

١ - المصفوفة P تسمى أيضاً مصفوفة الدوران حيث $X = P X^{`}$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad X^{`} = \begin{bmatrix} x^{`} \\ y^{`} \end{bmatrix}$$

٢ - أعمدة المصفوفة P هي المتجهات الذاتية المتعامدة المُعيَّارية للمصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية $X^T A X$.

أي أن $P = [N_1 \quad N_2]$

حيث N_1 , N_2 هي المتجهات الذاتية المتعامدة المُعيَّارية للمصفوفة A .

٣ - المحاور الجديدة $X^{`} , Y^{`}$ الناتجة من دوران المحاور X , Y تحت تأثير P تنطبق على المتجهات الذاتية للمصفوفة A .

٤ - المصفوفة P تحول المصفوفة A إلى الصورة القطرية حيث العناصر القطرية في A هي نفسها القيم الذاتية للمصفوفة A .

أي أن $D = P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

حيث λ_1 , λ_2 القيم الذاتية للمصفوفة A .

٥ - يجب ملاحظة أن P مصفوفة عمودية وبالتالي $|P| = \pm 1$ ودائماً نجعل $|P| = 1$ ليكون الدوران في اتجاه ضد عقارب الساعة فإذا كان $|P| = -1$ فإنه من الضروري تبديل عمودين من أعمدة المصفوفة P أو ضرب عمود في (1-) .

ثالثاً : القطوع المخروطية

[متطلبات هذا الجزء الصيغ التربيعية]

الصورة العامة لمعادلة القطوع المخروطية هي

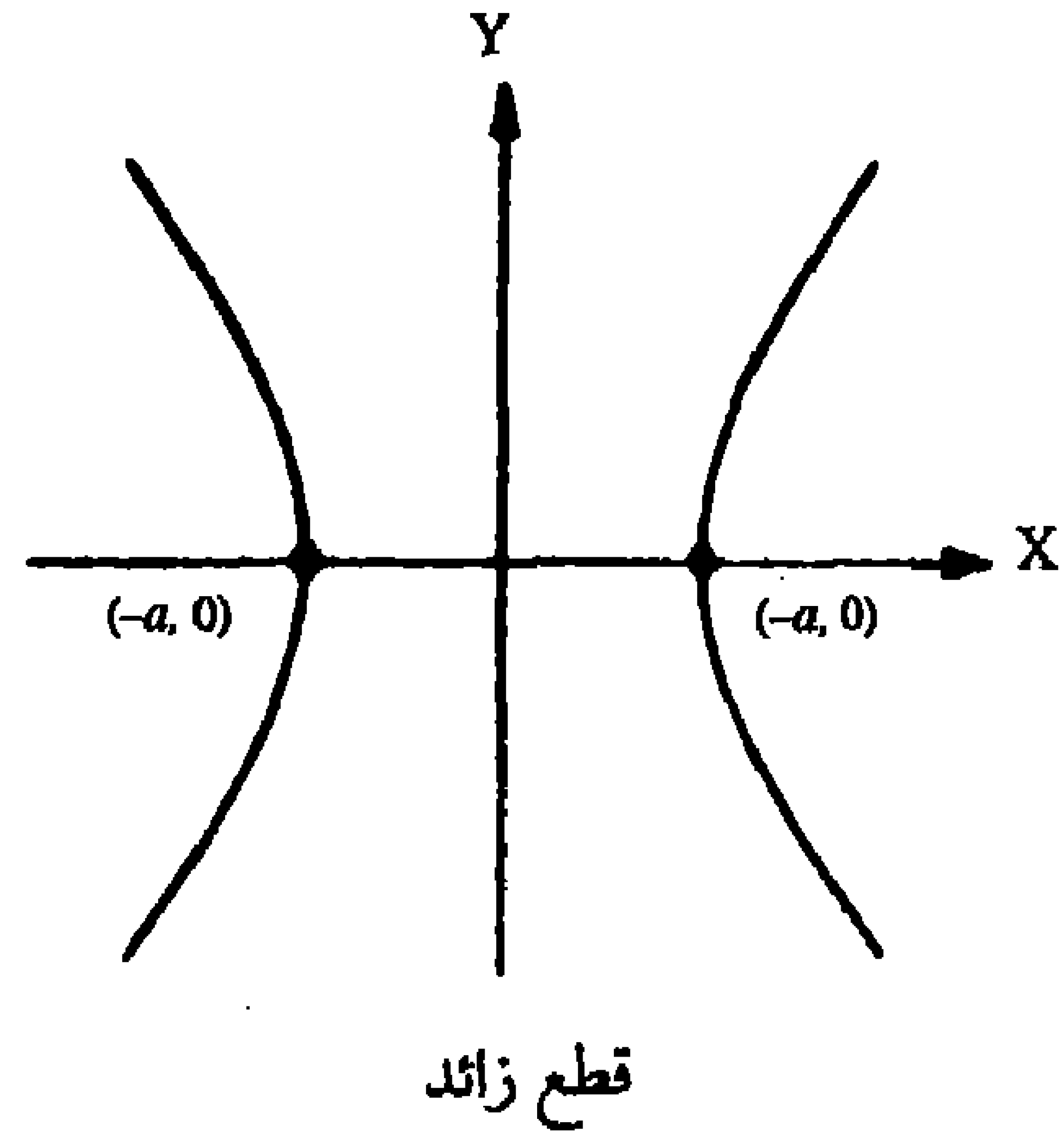
$$a x^2 + 2 b x y + c y^2 + d x + e y + f = 0 \qquad (1)$$

حيث $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$

تسمى هذه المنحنيات بالقطوع المخروطية لأنها تمثل تقاطع مستوى بالمخروط الدائري القائم حيث ينتج القطع الزائد ـ القطع الناقص ـ القطع المكافئ ـ الدائرة .

تعريف :

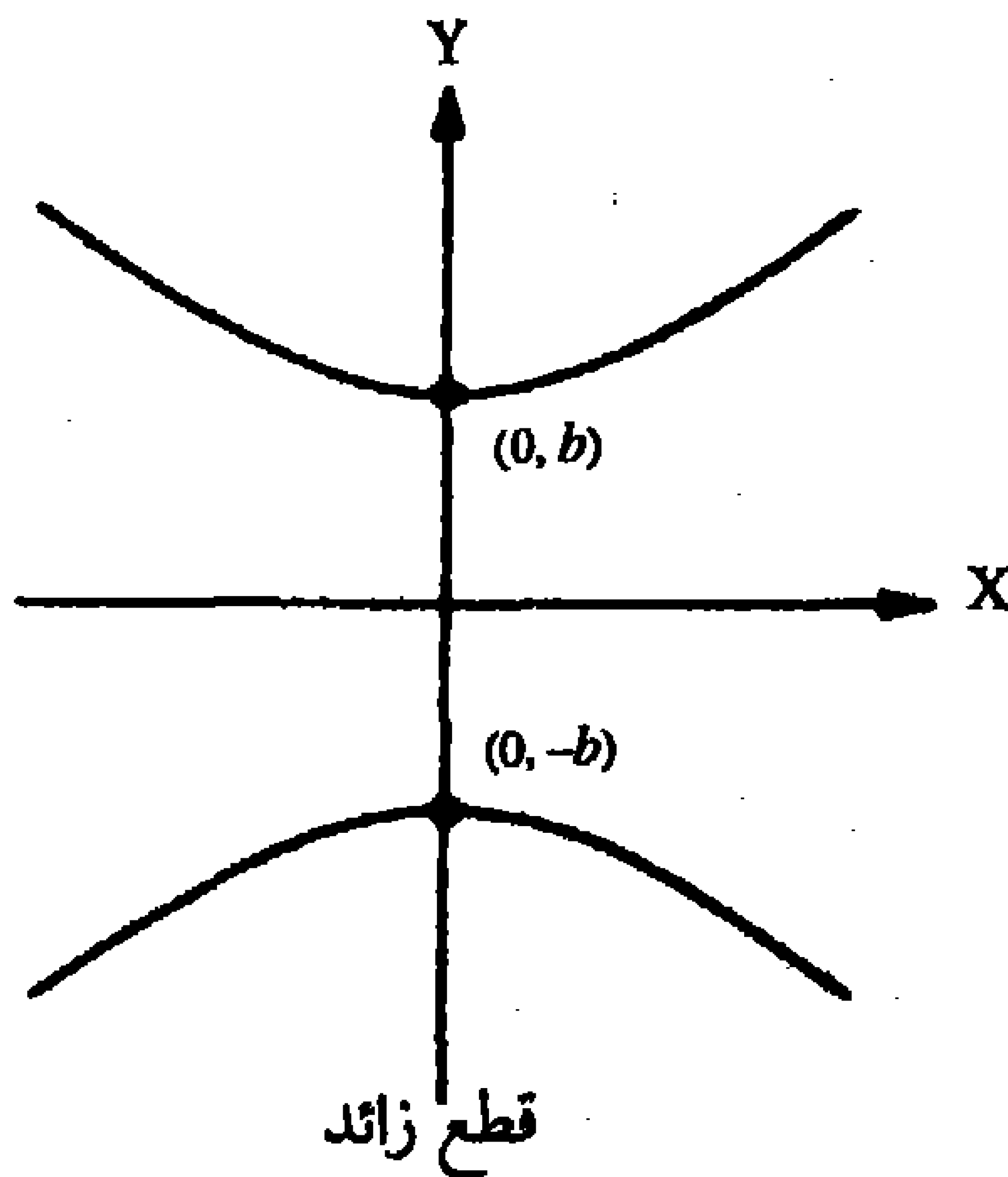
يقال للقطوع المخروطية إنها في الوضع القياسي بالنسبة لنظام الإحداثيات إذا أمكن التعبير عن معادلاتها وبالتالي منحنياتها بالصور القياسية التالية



قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

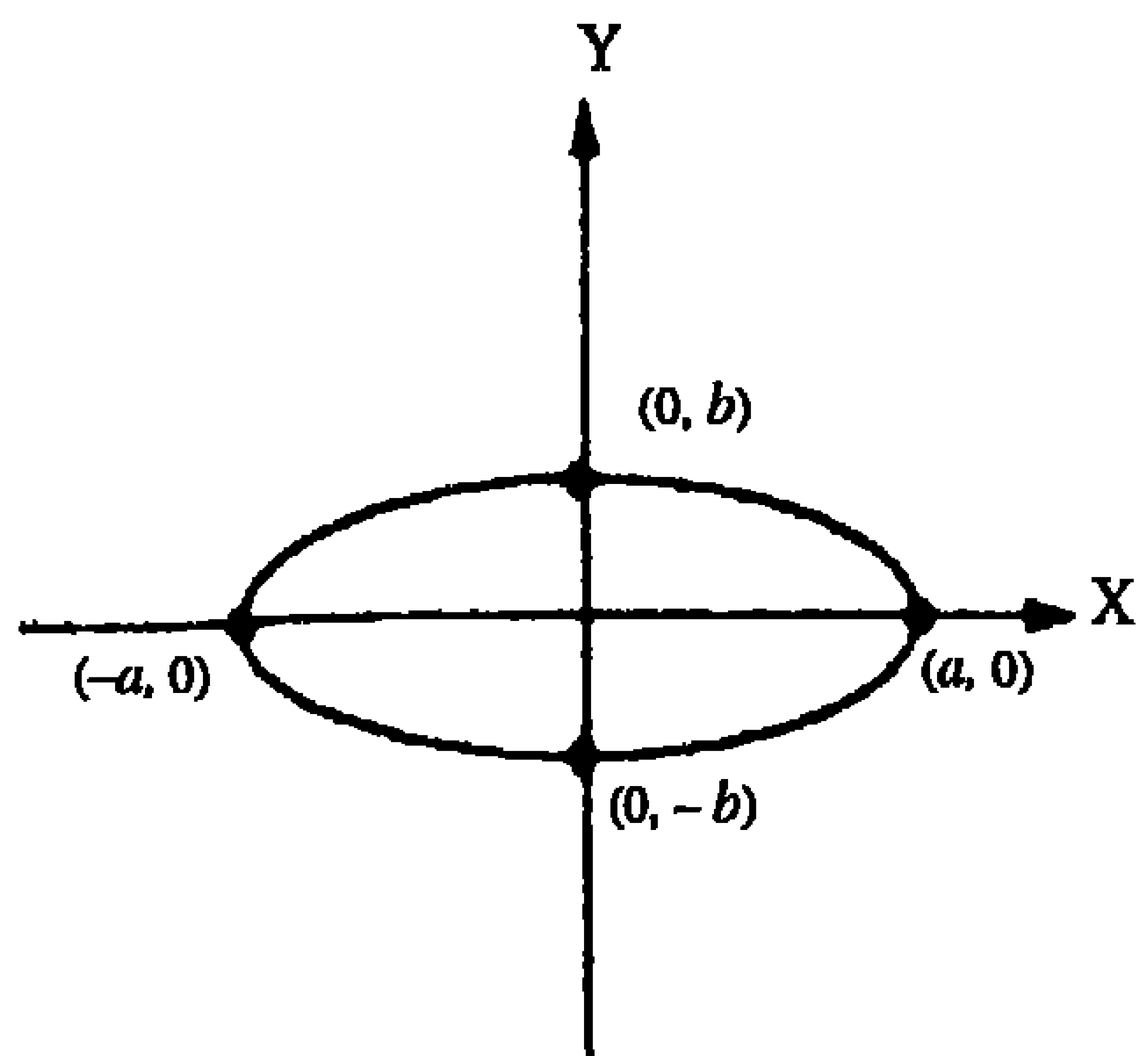
$a > 0 , b > 0$



قطع زائد

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

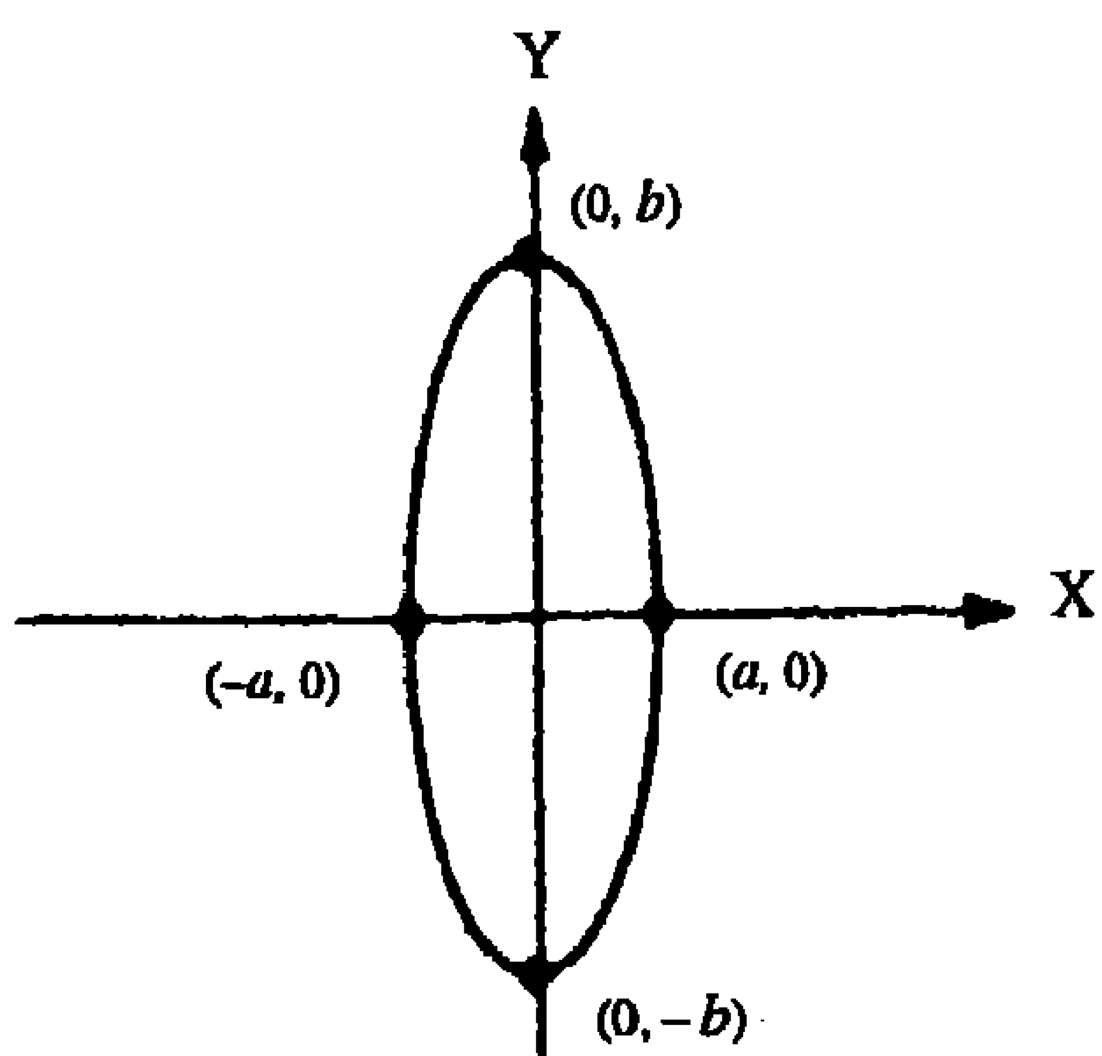
$a > 0 , b > 0$



قطع ناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

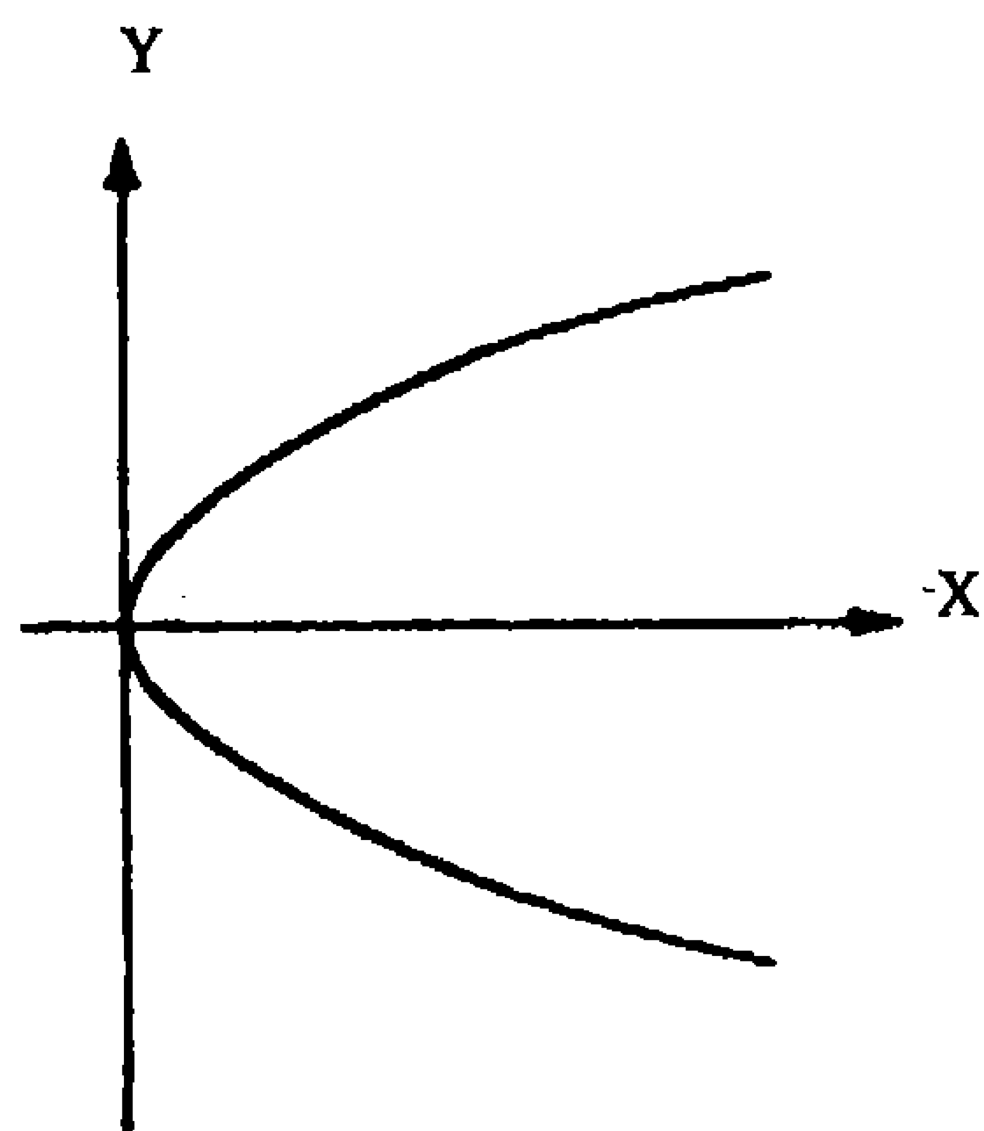
$$a > b > 0$$



قطع ناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

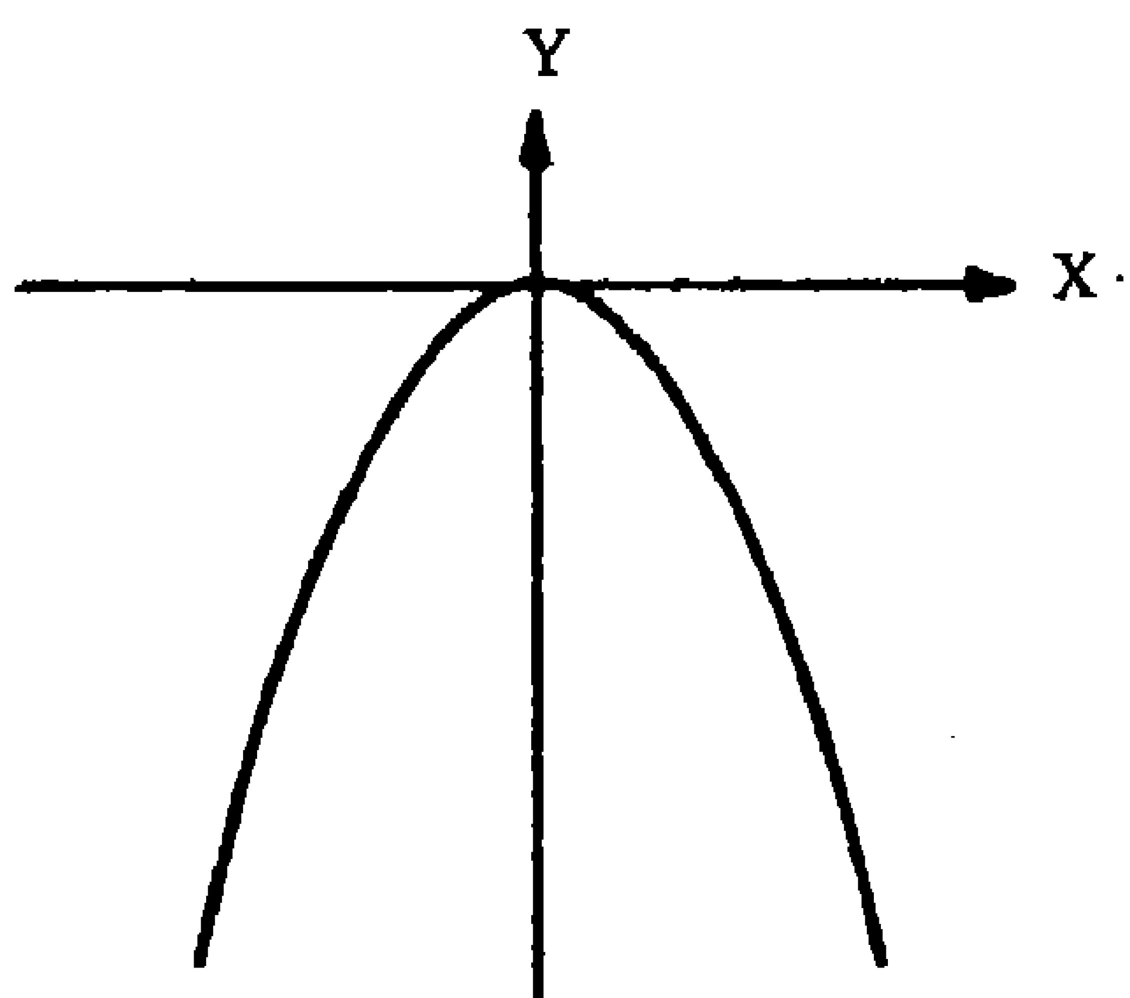
$$b > a > 0$$



قطع مكافئ

$$y^2 = a\,x$$

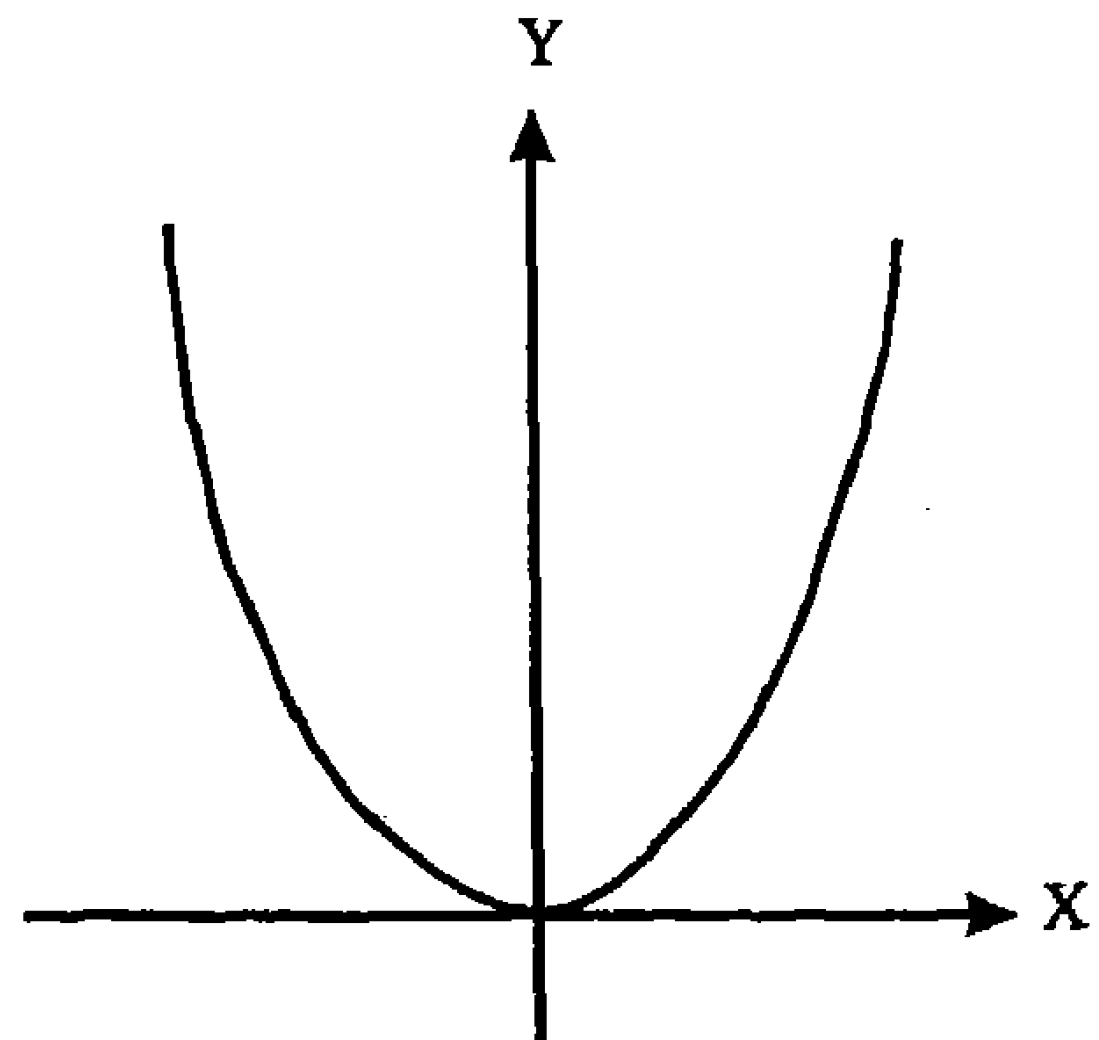
$$a > 0$$



قطع مكافئ

$$x^2 = a\,y$$

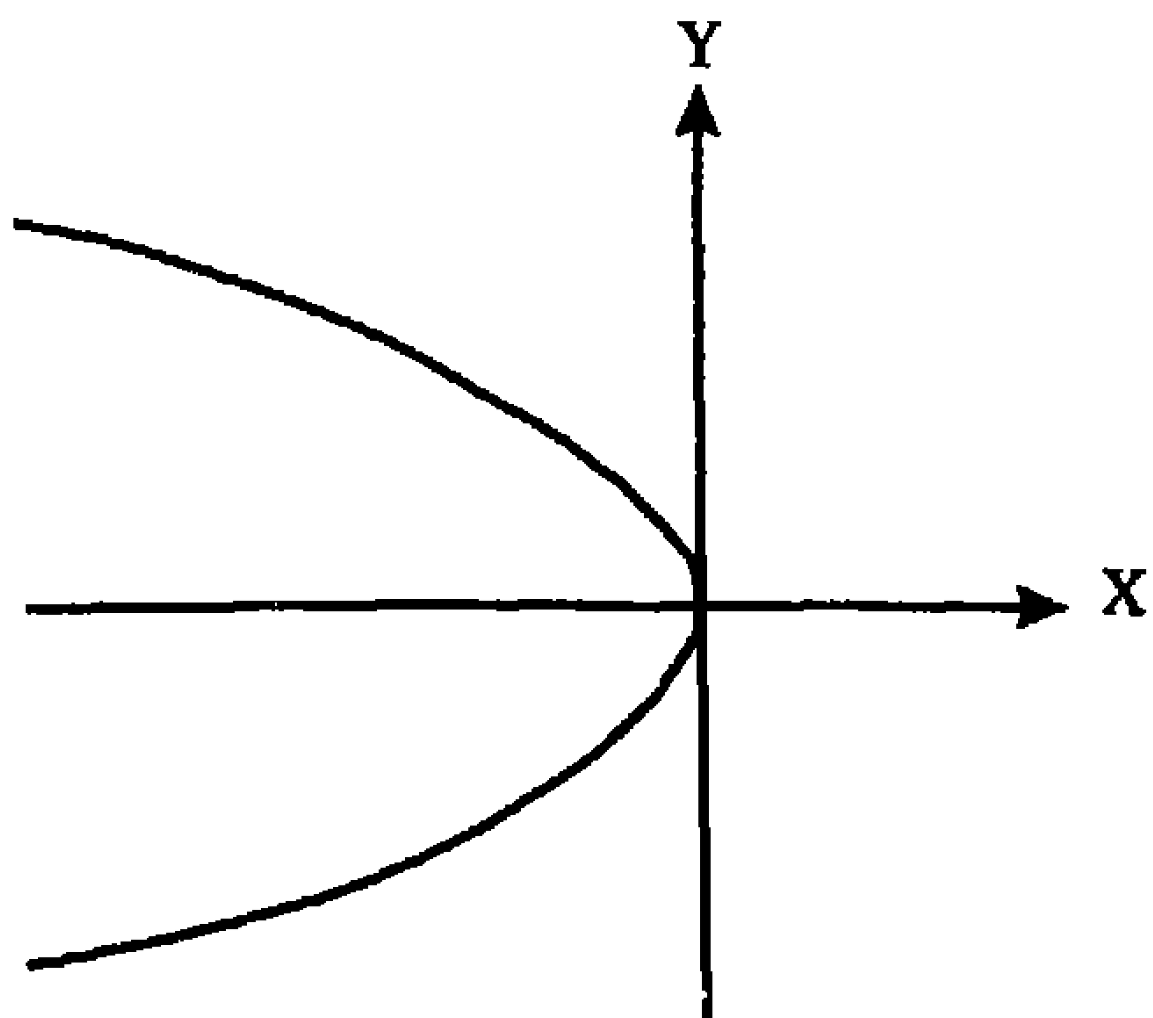
$$a < 0$$



قطع مكافئ

$x^2 = a\,y$

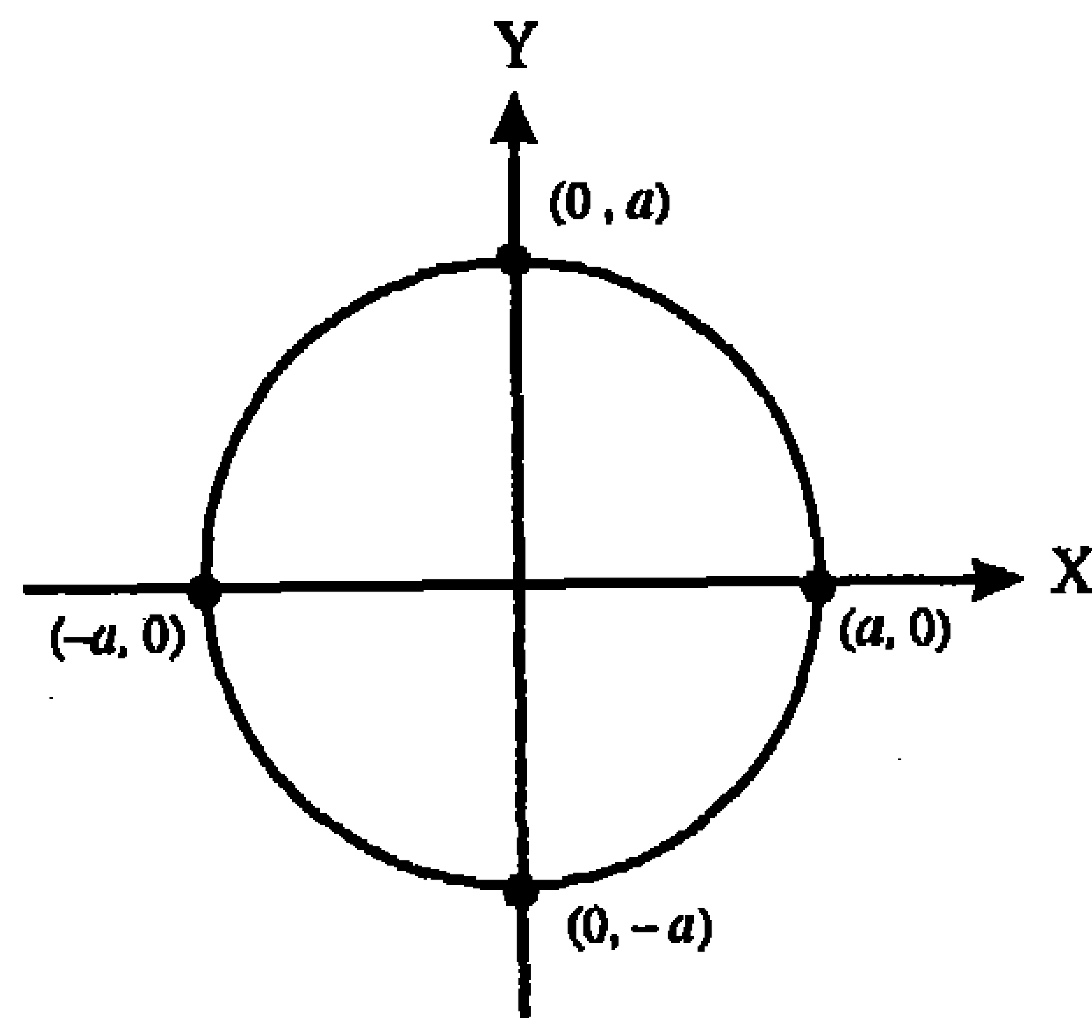
$a > 0$



قطع مكافئ

$y^2 = a\,x$

$a < 0$



دائرة

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

مثال (٩ ـ ١٤) :

تعرف على المنحنيات التالية وصف كل منها

(i) $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$

(ii) $9y^2 - 4x^2 = -36$

(iii) $x^2 + 4y = 0$

(iv) $y^2 = 0$

(v) $x^2 + 9y^2 + 9 = 0$

(vi) $x^2 + y^2 = 0$

(i)

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

وهي صورة قياسية للقطع الناقص حيث $a = 5\ ,\ b = 2$

لإيجاد نقط التقاطع مع محور السينات نضع $y = 0$ ، فيكون $x = \pm 5$

إذن نقط تقاطع القطع مع محور X هي $(-5, 0)$ ، $(5, 0)$

لإيجاد نقط التقاطع مع محور Y نضع $x = 0$ فينتج $y = \pm 2$

إذن نقط تقاطع القطع مع محور Y هي $(0, -2)\ ,\ (0, 2)$

(ii)

$$9\,y^2 - 4\,x^2 = -36$$

$$\frac{9}{-36}\,y^2 - \frac{4}{-36}x^2 = 1$$

$$\frac{-y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$$

أي أن

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

وهي تمثل قطع زائد في صورته القياسية حيث $b = 2$, $a = 3$

نقط تقاطعه مع محور X هي $(-3, 0)$, $(3, 0)$

(iii)

$$x^2 + 4\,y = 0$$

$$x^2 = -4\,y$$

وهي تمثل قطع مكافئ في صورته القياسية حيث محوره هو محور Y وفتحته لأسفل ، $a = -4$

(iv)

$$y^2 = 0$$

هو محورالسينات

(v)

$$x^2 + 9\,y^2 = -9$$

$$x = \sqrt{-9 - 9\,y^2}$$

وحيث y^2 موجب إذن ما تحت الجذر يكون سالباً وبالتالي لا توجد قيم حقيقية لـ x تحقق هذه المعادلة .

(vi)

$$x^2 + y^2 = 0$$

$$x = \sqrt{-y^2}$$

لا توجد قيم حقيقية تحقق هذه المعادلة سوى $x = 0 , y = 0$
أي المعادلة تمثل النقطة $(0, 0)$

يتركز اهتمامنا في هذا الجزء على دراسة العلاقة بين حدود معادلة القطوع المخروطية في صورتها العامة (1) وما تم من تحويل للإحداثيات (دوران ـ انتقال ـ دوران مع انتقال) على صورتها القياسية وهذا ما سنوضحه في النقاط التالية :

١ - إذا احتوت المعادلة (1) على الحد xy تعني أن القطع المخروطي تم دورانه عن الوضع القياسي وعليه فإننا ندور المحورين X , Y بواسطة تحويل خطي متعامد لحذف هذا الحد وقد تم تطبيق ذلك في معالجتنا للصيغ التربيعية .

٢ - إذا احتوت المعادلة (1) على الحدين x^2 , x (أو y^2 , y) معاً مع عدم وجود الحد xy تعني أن القطع المخروطي تم انتقاله من الوضع القياسي . وللحصول على الصورة القياسية فإننا نجري انتقال للمحورين باستخدام إكمال المربع للتخلص من هذا الحد .

٣ - إذا احتوت المعادلة (1) على الحد xy إضافة إلى الحدين x^2 , x (أو y^2 , y) معاً تعني أن القطع تأثر بدوران مع احتمال انتقال من وضعه القياسي .

أي أنه إذا كانت معادلة القطع المخروطي في صورتها العامة (1)

حيث $b \neq 0$ تعني أن الحد xy يكون موجوداً فإننا نحتاج إلى إجراء دوران للمحاور لحذف الحد xy ثم نتبعه بانتقال للمحاور إذا كان ضرورياً للتخص من حدود الدرجة الأولى ونلخص ذلك في الخوارزمية التالية :

١ - نكتب المعادلة (1) على الصورة المصفوفية .

$$X^T A X + B X + f = 0 \qquad (2)$$

حيث $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, $B = [d \quad e]$

٢ - بما أن A مصفوفة متماثلة إذن يمكن تحويلها للصورة القطرية بواسطة مصفوفة عمودية P

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

حيث λ_1 , λ_2 هي القيم الذاتية للمصفوفة A .

مع ملاحظة أن أعمدة P هي المتجهات الذاتية المتعامدة المُعيَّارية للمصفوفة A والمصاحبة للقيم الذاتية λ_1 , λ_2 على الترتيب .

$$P = [N_1 \quad N_2] = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix}$$

٣ - نضع $X = PX'$ في المعادلة (2) حيث $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

نحصل على $(PX')^T A (PX') + B (PX') + f = 0$

$$X'^T (P^T A P) X' + B (P X') + f = 0$$

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [d \quad e] (P X') + f = 0 \qquad (3)$$

ولكن

$$PX' = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} x' + n_{12} y' \\ n_{21} x' + n_{22} y' \end{bmatrix}$$

أيضاً

$$[d \quad e]\,(PX`) = [d \quad e] \begin{bmatrix} n_{11}\,x` + n_{12}\,y` \\ n_{21}\,x` + n_{22}\,y` \end{bmatrix}$$

$$= d\,(n_{11}\,x` + n_{12}\,y`) + e\,(n_{21}\,x` + n_{22}\,y`)$$

$$= (dn_{11} + en_{21})\,x` + (dn_{12} + en_{22})\,y`$$

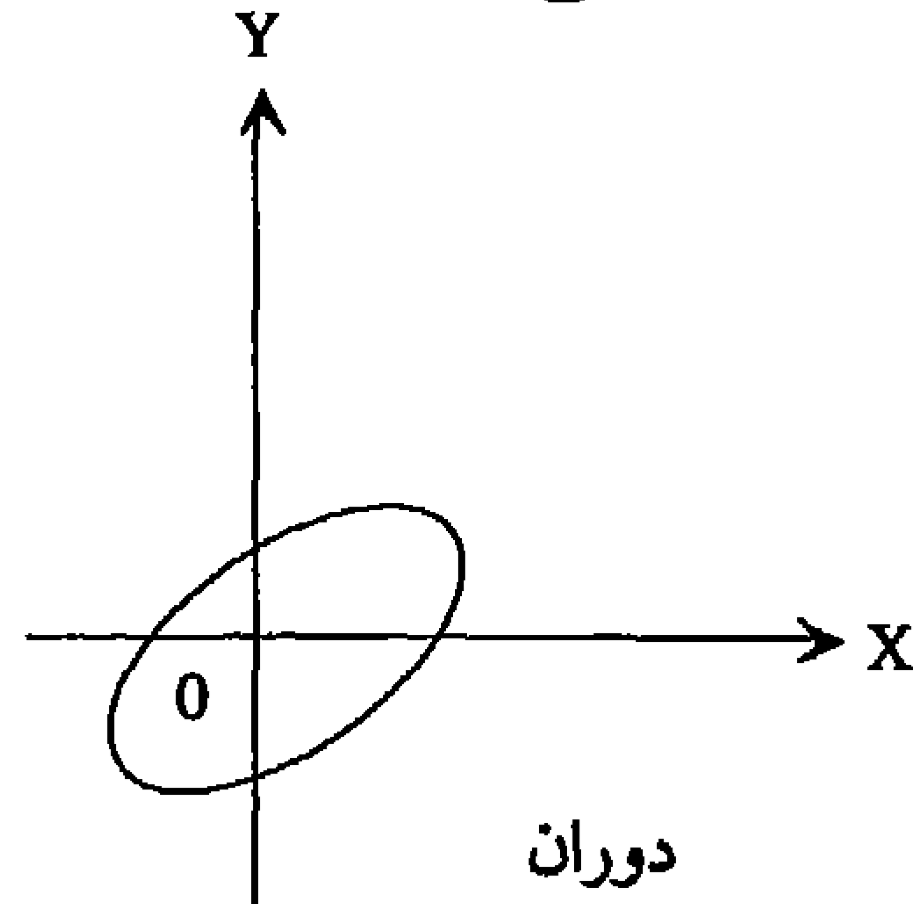
$$= d`\,x` + e`\,y`$$

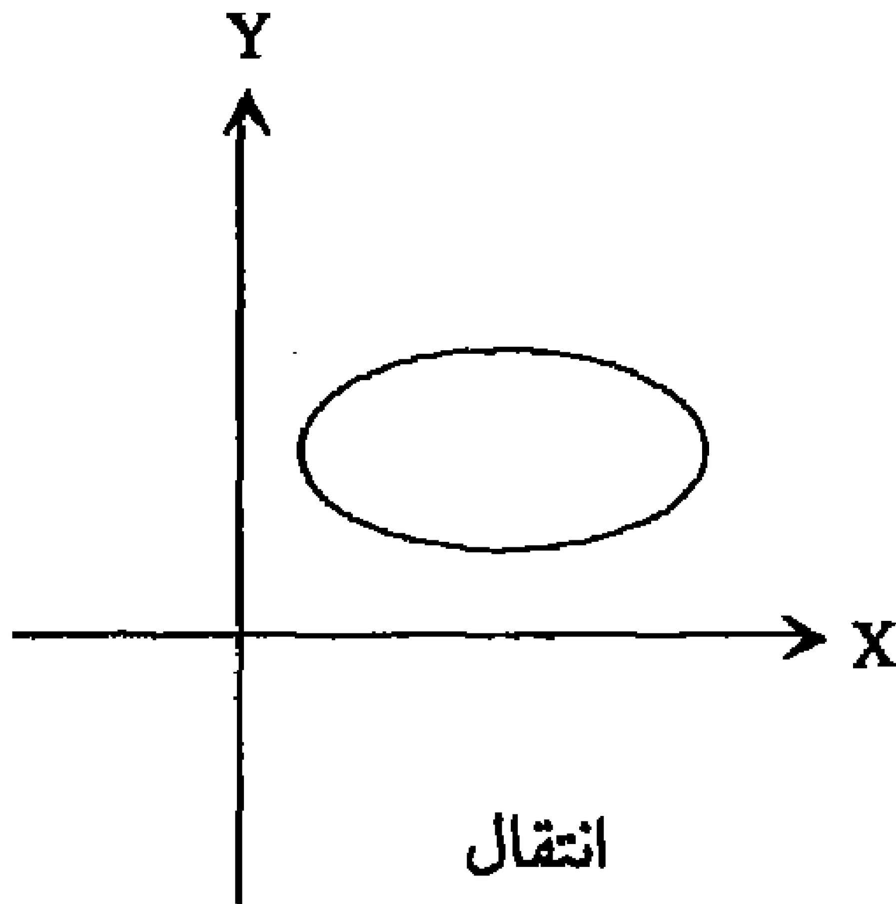
بالتعويض في (3) نحصل على

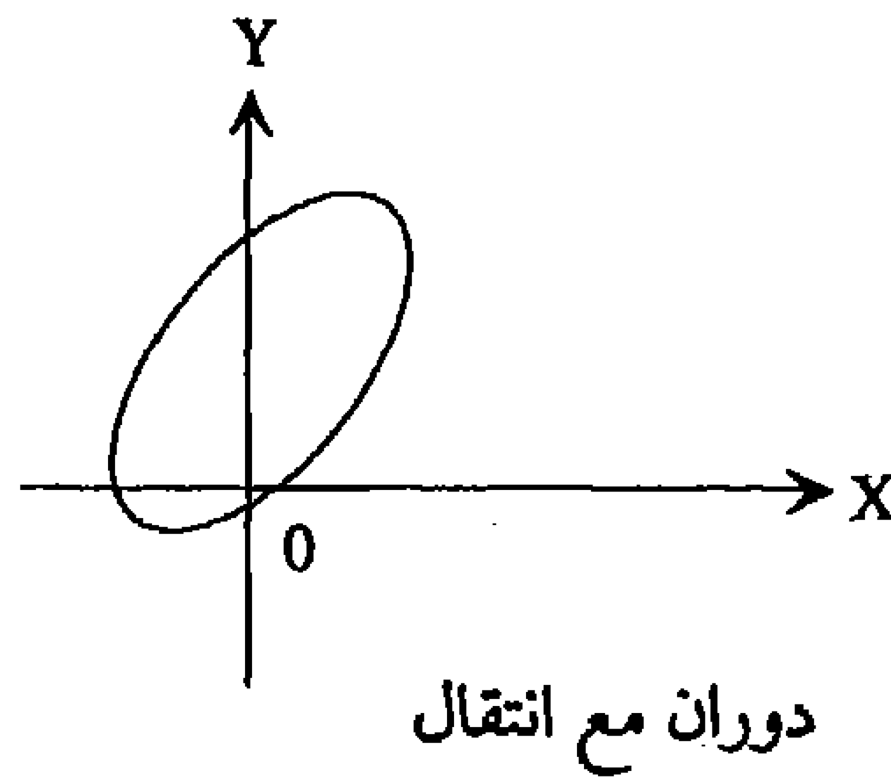
$$[x` \;\; y`] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix} + (d`\,x` + e`\,y`) + f = 0$$

$$\lambda_1\,x`^2 + \lambda_2\,y`^2 + d`\,x` + e`\,y` + f = 0$$

وهي معادلة لا تحتوي على الحد xy ولكنها تحتوي على حدود من الدرجة الأولى ، وللحصول على الصورة القياسية فإننا نجري انتقال باستخدام إكمال المربع .







من خلال الأمثلة التالية نستعرض معالجة الحالات الثلاث السابق ذكرها .

مثال (٩ ـ ١٥) :

ادرس معادلة القطع المخروطي

$$5x^2 + 4xy + 5y^2 - 9 = 0$$

ثم اكتبها في الصورة القياسية .

نلاحظ أن هذه المعادلة تحتوي على الحد xy أي أن القطع المخروطي في صورة غير قياسية نتيجة تأثره بدوران وهي نفس الصيغ التربيعية التي سبق دراستها ولذلك نتبع نفس الأسلوب السابق باستخدام نظرية المحاور الرئيسية .

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية $X^T A X = 9$

أو

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda - 3)(\lambda - 7) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 3 \quad , \quad \lambda_2 = 7$

وبتطبيق نظرية المحاور الرئيسية نحصل على الصيغة المكافئة

$$H(X') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

$$= 3x'^2 + 7y'^2$$

الصيغة التربيعية المكافئة هي

$$3x'^2 + 7y'^2 = 9$$

أو

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{9/7} = 1$$

وهي تمثل قطع ناقص مركزة نقطة الأصل $(0, 0)$ حيث $a^2 = 3 , b^2 = \frac{9}{7}$

مثال (٩ـ١٦) :

تعرّف على القطع المخروطي

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0$$

واكتب معادلته في الصورة القياسية .

بما أن الحد xy غير موجود مع ظهور الحدين x , x^2 معاً ، y, y^2 معاً

بإكمال المربع

$$(x^2 + 6x) - 4(y^2 - 4y) - 23 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 - 4[(y-2)^2 - 4] - 23 = 0$$

$$(x+3)^2 - 9 - 4\ (y-2)^2 + 16 - 23 = 0$$

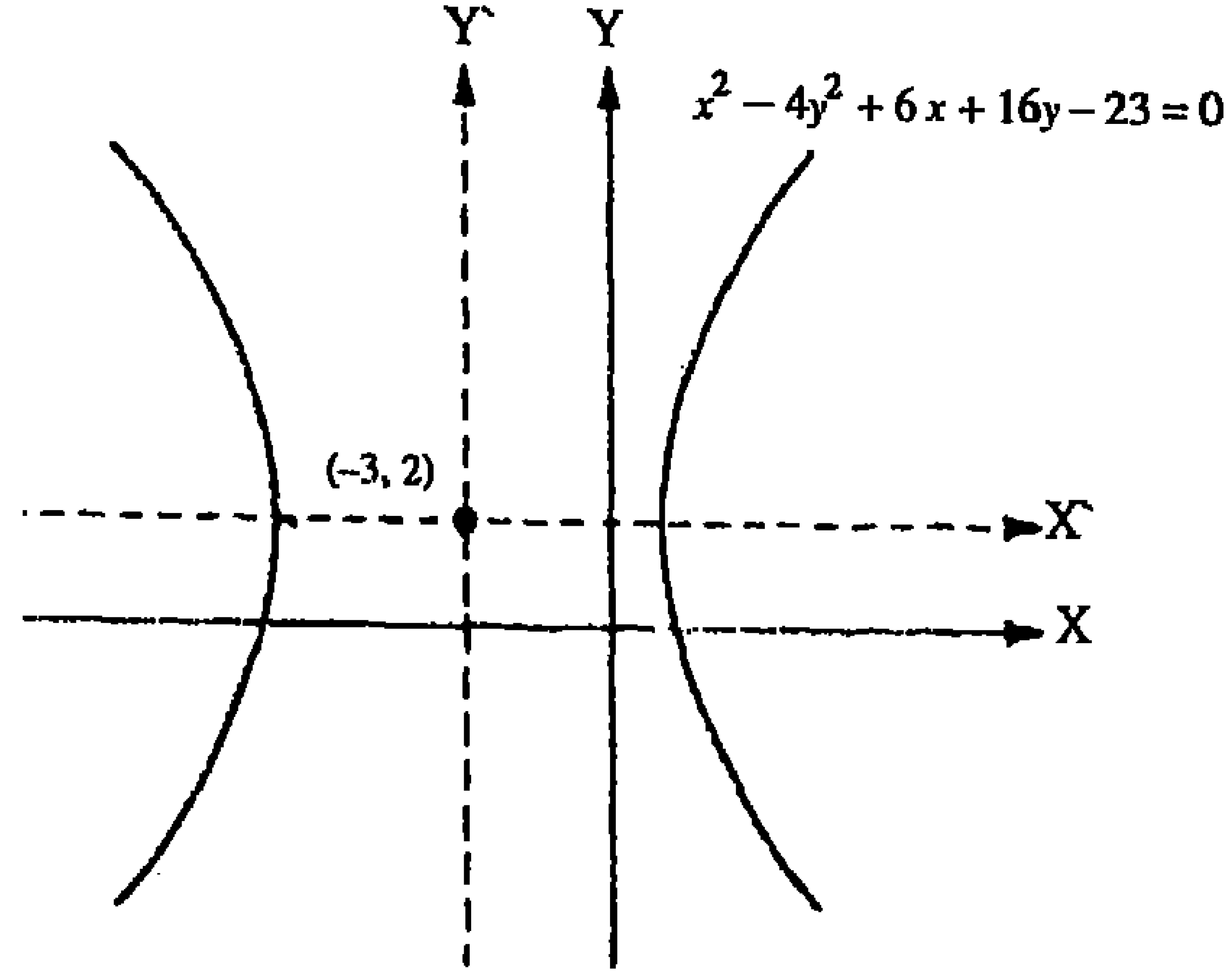
$$(x+3)^2 - 4(y-2)^2 - 16 = 0$$

بإجراء الانتقال نضع $y' = y - 2 \qquad x' = x + 3$

نحصل على $x'^2 - 4y'^2 = 16$

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

وهي تمثل قطع زائد مركزة النقطة $(-3,2)$ حيث $a^2 = 16 , b^2 = 4$



مثال (٩ ـ ١٧) :

ادرس القطع المخروطي

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y + 56 = 0$$

واكتب معادلته في الصورة القياسية .

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية $X^T A X + BX + f = 0$

حيث

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},\ B = [-24\sqrt{2} \quad 8\sqrt{2}],\ f = 56$$

$$[x \quad y] \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-24\sqrt{2} \quad 8\sqrt{2}] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 56 = 0$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9$$

$$25 + \lambda^2 - 10\lambda - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 8) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 8$

نوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A ، بحل النظام المتجانس

$$(A - \lambda I_2) X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 2$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_2 = 8$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-3x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 = -x_2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 8$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

بكتابة المتجهات الذاتية P_1, P_2 في الصورة المُعيَّارية

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نكون المصفوفة $P = [N_1 \quad N_2]$

إذن

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وأيضاً

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

بوضع $X = PX`$ نحصل على

$$X = P X` = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x` - y` \\ x` + y` \end{bmatrix}$$

بالتعريض في الصورة المصفوفية نحصل على

$$X`^T (P^T A P) X` + BPX` + f = 0$$

$$[x` \quad y`] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` - y` \\ x` + y` \end{bmatrix} + 56 = 0$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 24(x' - y') + 8(x' + y') + 56 = 0$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16x' + 32y' + 56 = 0$$

$$x'^2 + 4y'^2 - 8x' + 16y' + 28 = 0$$

وهكذا تم حذف الحد xy ونحتاج الآن لإجراء انتقال بإكمال المربع

$$(x'^2 - 8x') + 4(y'^2 + 4y') + 28 = 0$$

$$(x' - 4)^2 - 16 + 4[(y' + 2)^2 - 4] + 28 = 0$$

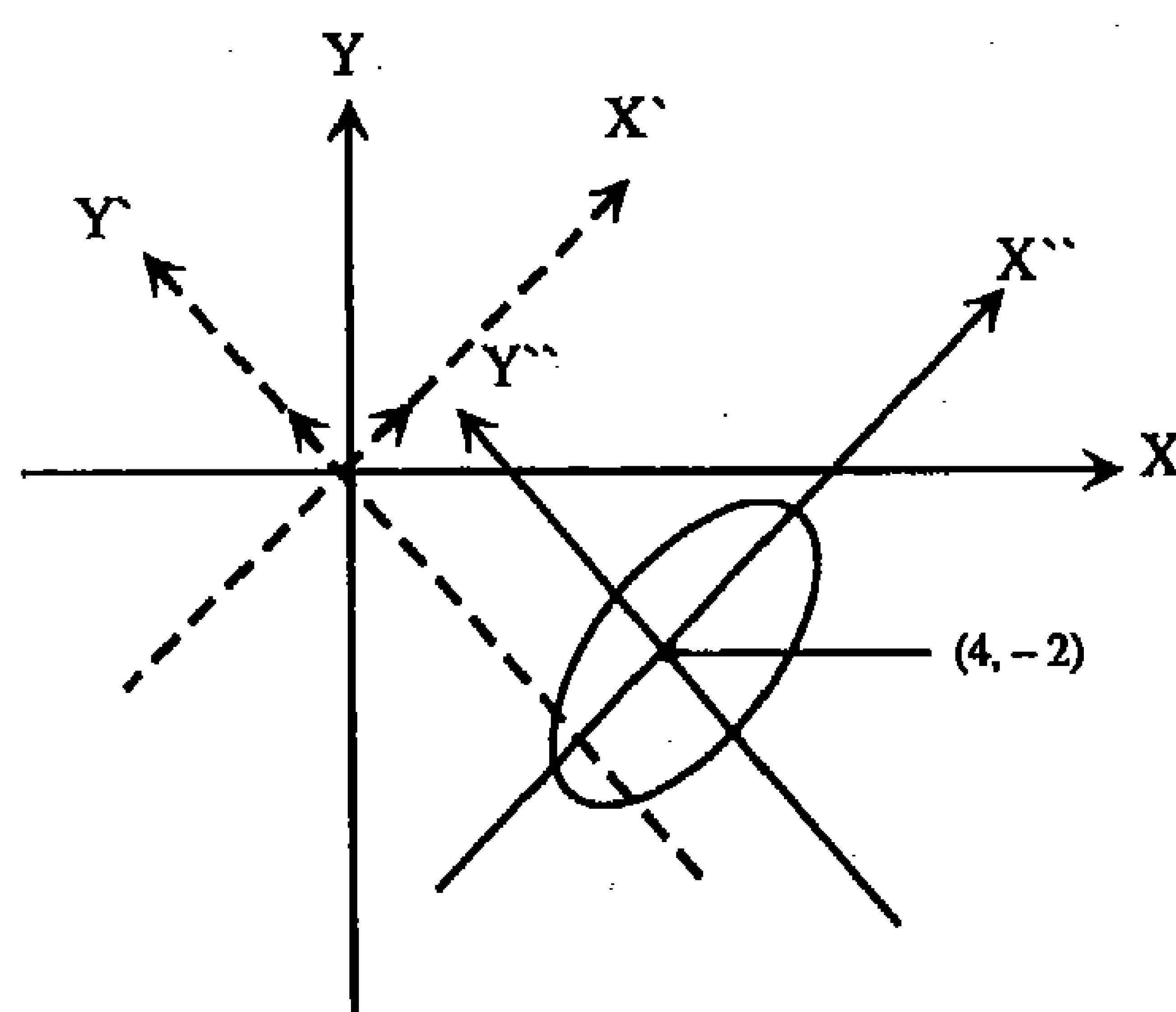
$$(x' - 4)^2 + 4(y' + 2)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{(x' - 4)^2}{4} + \frac{(y' + 2)^2}{1} = 1$$

بوضع $x' - 4 = x''$, $y' + 2 = y''$

نحصل على $\dfrac{x''^2}{4} + \dfrac{y''^2}{1} = 1$

وهي تمثل قطع ناقص مركزه النقطة $(4, -2)$



$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y + 56 = 0$

مثال (٩ـ١٨) :

ادرس القطع المخروطي

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 - 15x - 6y = 0$$

مع تحديد نوع القطع بعد كتابته في الصورة القياسية .

المعادلة تحتوي الحد xy وأيضاً الحدين x^2, x معاً ولذلك فالقطع تأثر بدوران جعله في وضع غير قياسي مع احتمال تأثره بانتقال .

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية

أي أن $\quad X^T AX + BX + f = 0 \quad , \quad f = 0$

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [-15 \quad -6]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -10 \\ -10 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(25-\lambda) - 100$$

$$\lambda^2 - 29\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 29) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\quad \lambda_2 = 29 \quad , \quad \lambda_1 = 0$

نوجد المتجهات الذاتية بحل نظام المعادلات المتجانسة

$$(A - \lambda I_2)\, X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$4\, x_1 - 10\, x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{5}{2}\, x_2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 0$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_2 = 29$

$$\begin{bmatrix} -25 & -10 \\ -10 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-25\, x_1 - 10\, x_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{-2}{5}\, x_2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 29$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

بمُعايرة المتجهين P_1, P_2 نحصل على

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$P = [N_1 \quad N_2] = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad |P| = 1$$

$$P^T A\, P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{bmatrix}$$

بوضع $X = P X`$

$$X = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 5x` - 2y` \\ 2x` + 5y` \end{bmatrix}$$

بالتعويض في الصورة المصفوفية نحصل على

$$(PX`)^T A (PX`) + [-15 \quad -6] PX` = 0$$

$$X`^T (P^T A P) X` + \frac{1}{\sqrt{29}} [-15 \quad -6] \begin{bmatrix} 5x` - 2y` \\ 2x` + 5y` \end{bmatrix} = 0$$

$$[x` \quad y`] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{29}} [-75x` + 30y` - 12x` - 30y`] = 0$$

$$29 y`^2 + \frac{1}{\sqrt{29}} (-87 x`) = 0$$

$$y`^2 = \frac{3}{\sqrt{29}} \; x`$$

وهي تُمثل قطع مكافئ مركزه النقطة $(0, 0)$ حيث $a = \frac{3}{\sqrt{29}}$

مثال (٩-١٩) :

اكتب معادلة القطع المخروطي في الصورة القياسية مع تحديد اسم القطع

$$2x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 8y = -14$$

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية

$$X^T A X + BX + f = 0$$

أي أن
$$[x \quad y]\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + [-4 \quad -8]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 14 = 0$$

نوجد القيم الذاتية لمصفوفة
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_2| = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_1 = -2$

نوجد المتجهات الذاتية بحل نظام المعادلات المتجانسة

$$(A - \lambda I_2) X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = -2$
$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -2$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = -2 \quad , \quad x_2 = 1$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

بكتابة P_1 , P_2 في الصورة المعيارية

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad , \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad |P| = 1$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بوضع $X = PX`$ نحصل على

$$X = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} x` - 2y` \\ 2x` + y` \end{bmatrix}$$

بالتعويض في الصورة المصفوفية نحصل على

$$X^{`T}(P^T A P) X` + [-4 \quad -8]\ PX` + 14 = 0$$

$$[x` \quad y`] \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} [-4 \quad -8] \begin{bmatrix} x` - 2y` \\ 2x` + y` \end{bmatrix} + 14 = 0$$

$$-2x^{`2} + 3y^{`2} + \frac{1}{\sqrt{5}} [-4x` + 8y` - 16x` - 8y`] + 14 = 0$$

أي أن $\quad 2x^{`2} - 3y^{`2} + 4\sqrt{5}\ x` - 14 = 0$

لحذف الحد $x`$ نجري انتقالاً وذلك بإكمال المربع

$$2\ (x^{`2} + 2\sqrt{5}\ x`) - 3y^{`2} - 14 = 0$$

$$2\ [(x` + \sqrt{5})^2 - 5] - 3y^{`2} - 14 = 0$$

$$2\ (x` + \sqrt{5})^2 - 3y^{`2} = 24$$

$$\frac{(x` + \sqrt{5})^2}{12} - \frac{y^{`2}}{8} = 1$$

بوضع $\quad x` + \sqrt{5} = x`` \quad , \quad y` = y``$

نحصل على $\quad \frac{x^{``2}}{12} - \frac{y^{``2}}{8} = 1$

وتمثل المعادلة قطع زائد مركزه النقط $(-\sqrt{5}\ , 0)$

نلخص ما سبق في الجدول التالي

علاقة نوع القطع المخروطي بالقيم الذاتية للمصفوفة A

قطع مكافئ	قطع زائد	قطع ناقص
إحدى القيم الذاتية λ_1 أو λ_2 تساوي صفراً	$\lambda_2 \neq 0$,	$\lambda_1 \neq 0$
	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	$\lambda_1 \lambda_2 > 0$

مثال (٩ ـ ٢٠) :

حدد نوع القطع المخروطي الذي تمثله الصيغة التربيعية

$$9x^2 + 6y^2 + 4xy = 5$$

المصفوفة المصاحبة للصيغة التربيعية هي $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

نوجد القيمة الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4$$

$$= \lambda^2 - 15\lambda + 50$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

$$(\lambda - 5)(\lambda - 10) = 0$$

إذن القيم الذاتي هي $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$

أي أن $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$; $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

إذن الصيغة التربيعية تمثل قطع ناقص .

رابعاً : سطوح الدرجة الثانية

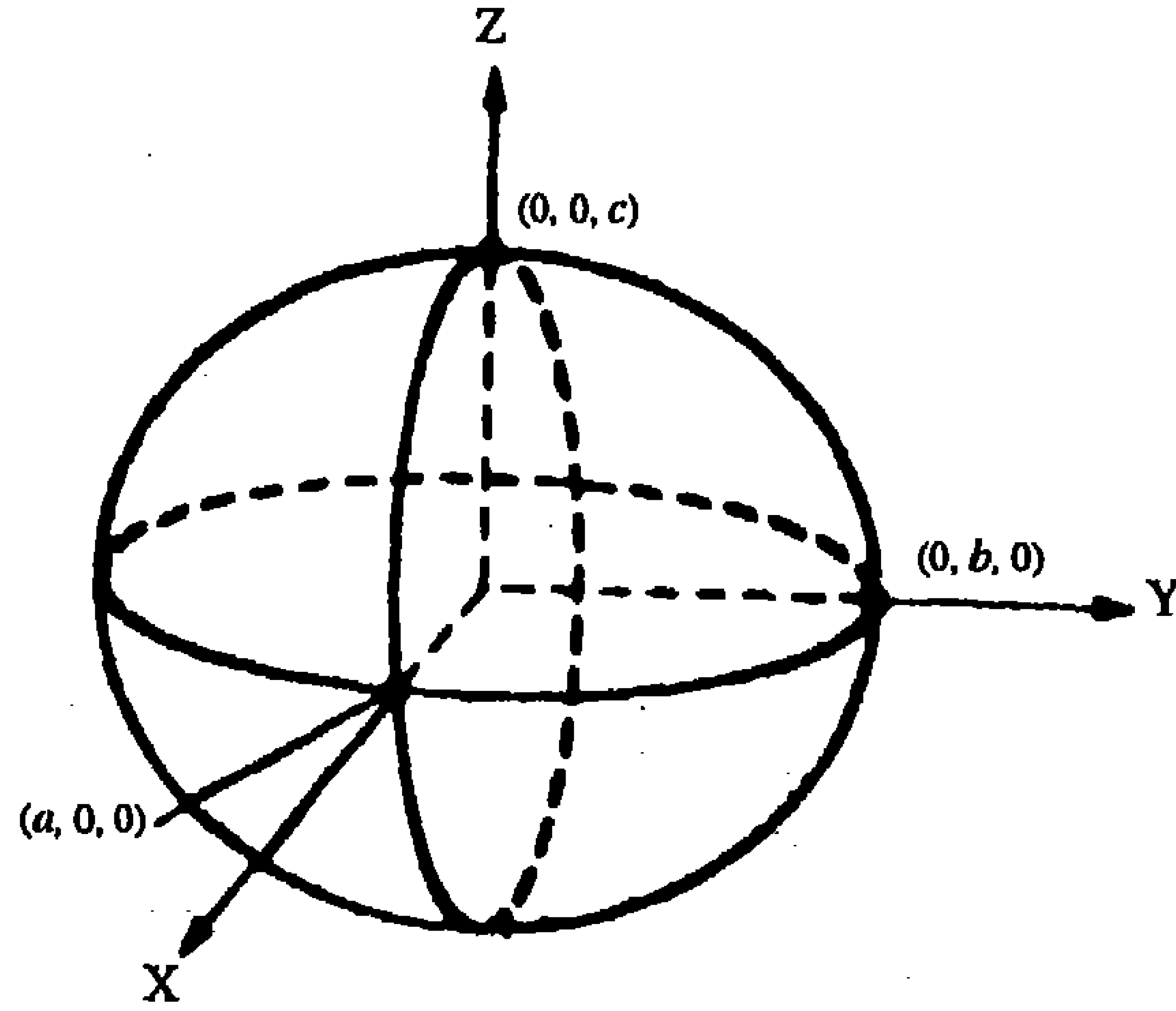
[متطلبات هذا الجزء دراسة القطوع المخروطية]

المعادلة العامة من الدرجة الثانية في ثلاث متغيرات x, y, z هي

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 d x y + 2 e x z + 2 f y z + g x + h y + k z = p \qquad (1)$$

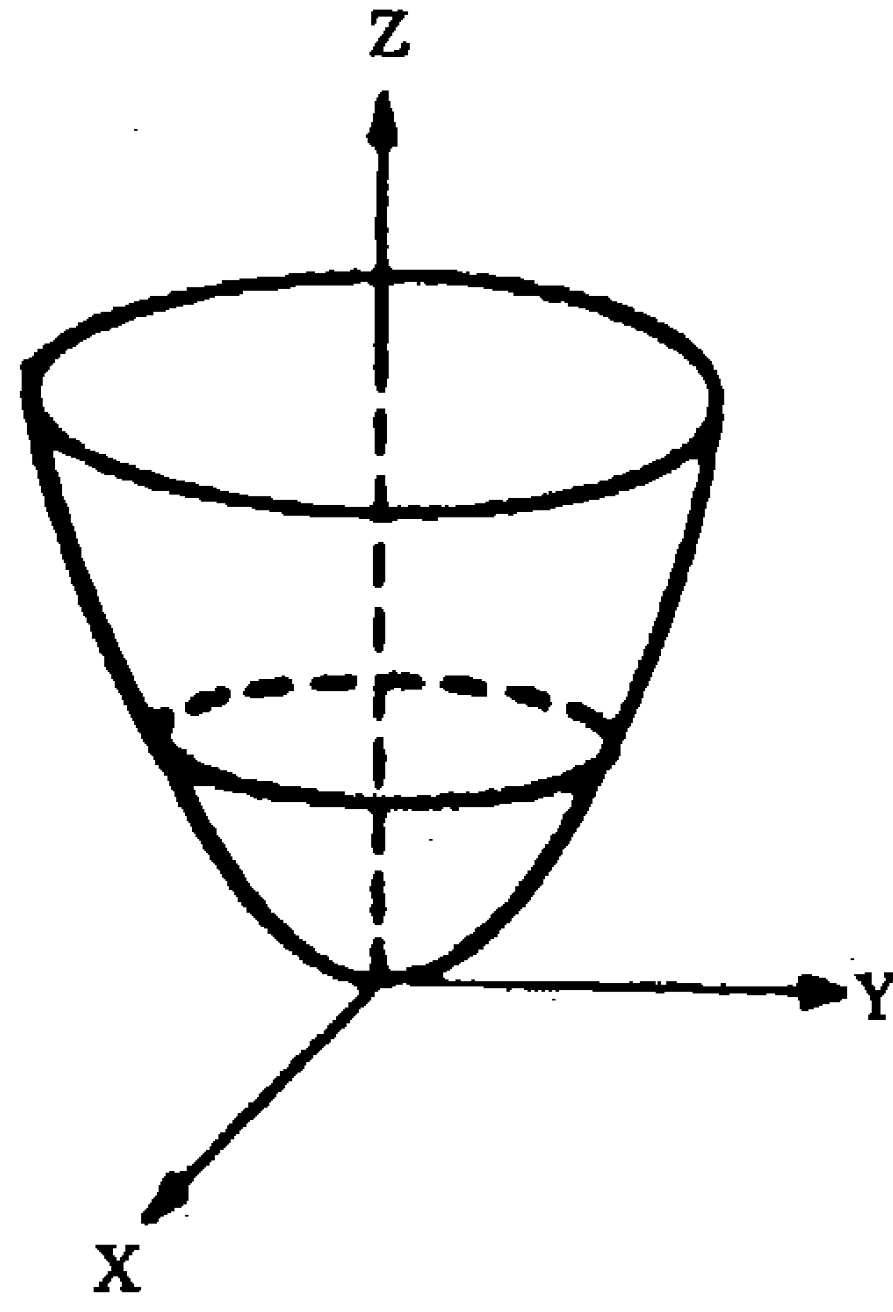
حيث جميع معاملات الحدود أعداداً حقيقية ويشرط ألا تنعدم وجميع معاملات الحدود من الدرجة الثانية لا تساوي الصفر تمثل سطح من الدرجة الثانية

قبل دراسة أنواع هذه السطوح وتقسيمها نستعرض معادلات وبالتالي منحنيات الصور القياسية لسطوح الدرجة الثانية المختلفة



سطح ناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



سطح مكافئ ناقصي

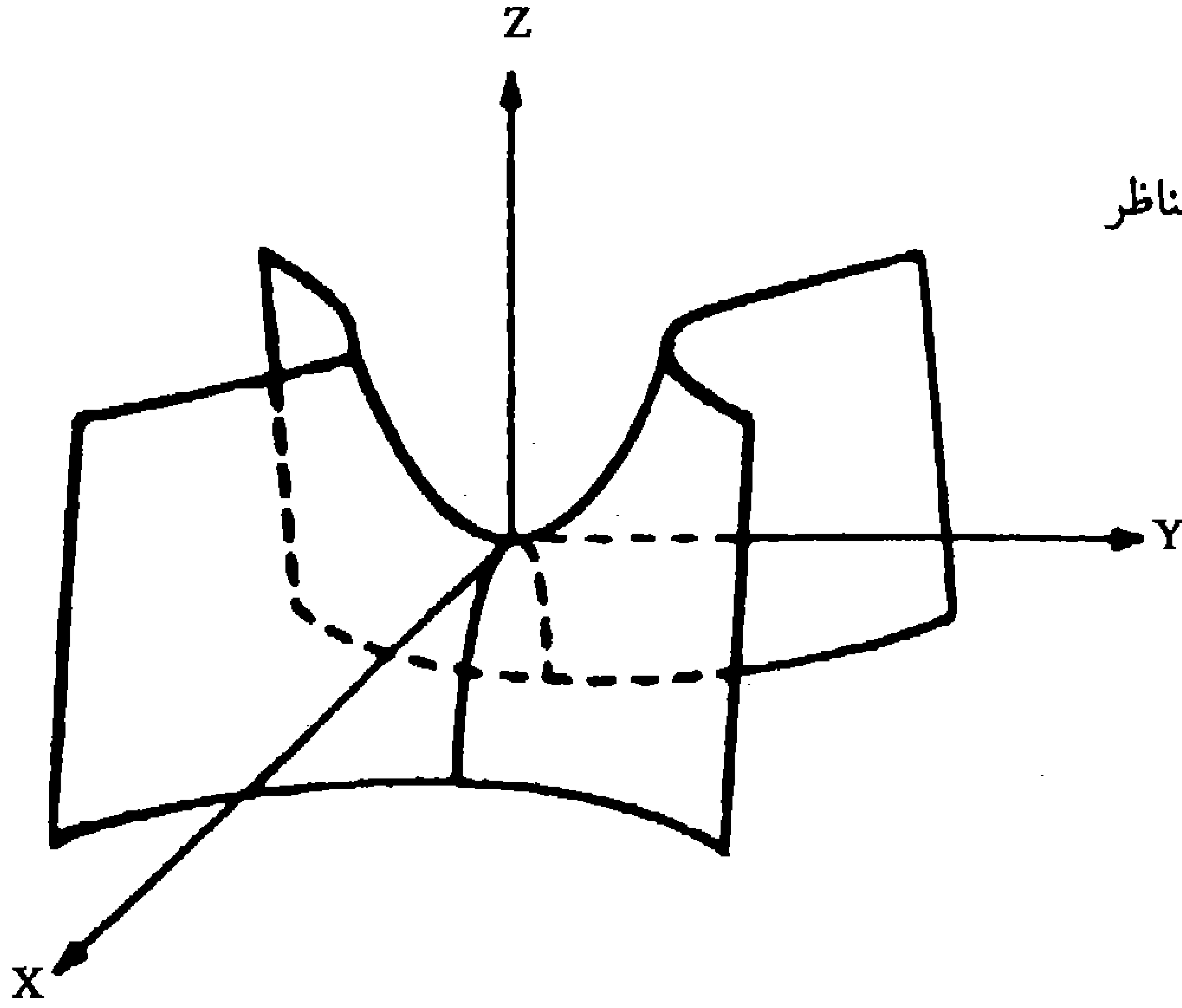
الصورة القياسية للشكل المناظر

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

الصورة القياسية الأخرى

$$y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} ,$$

$$x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$



سطح مكافئ زائدي

الصورة القياسية للشكل المناظر

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

الصورة القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -z ,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm y ,$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm x$$

سطح اسطوانة مكافئ

الصورة القياسية للشكل المناظر

$x^2 = a\,y \quad , \quad a > a$

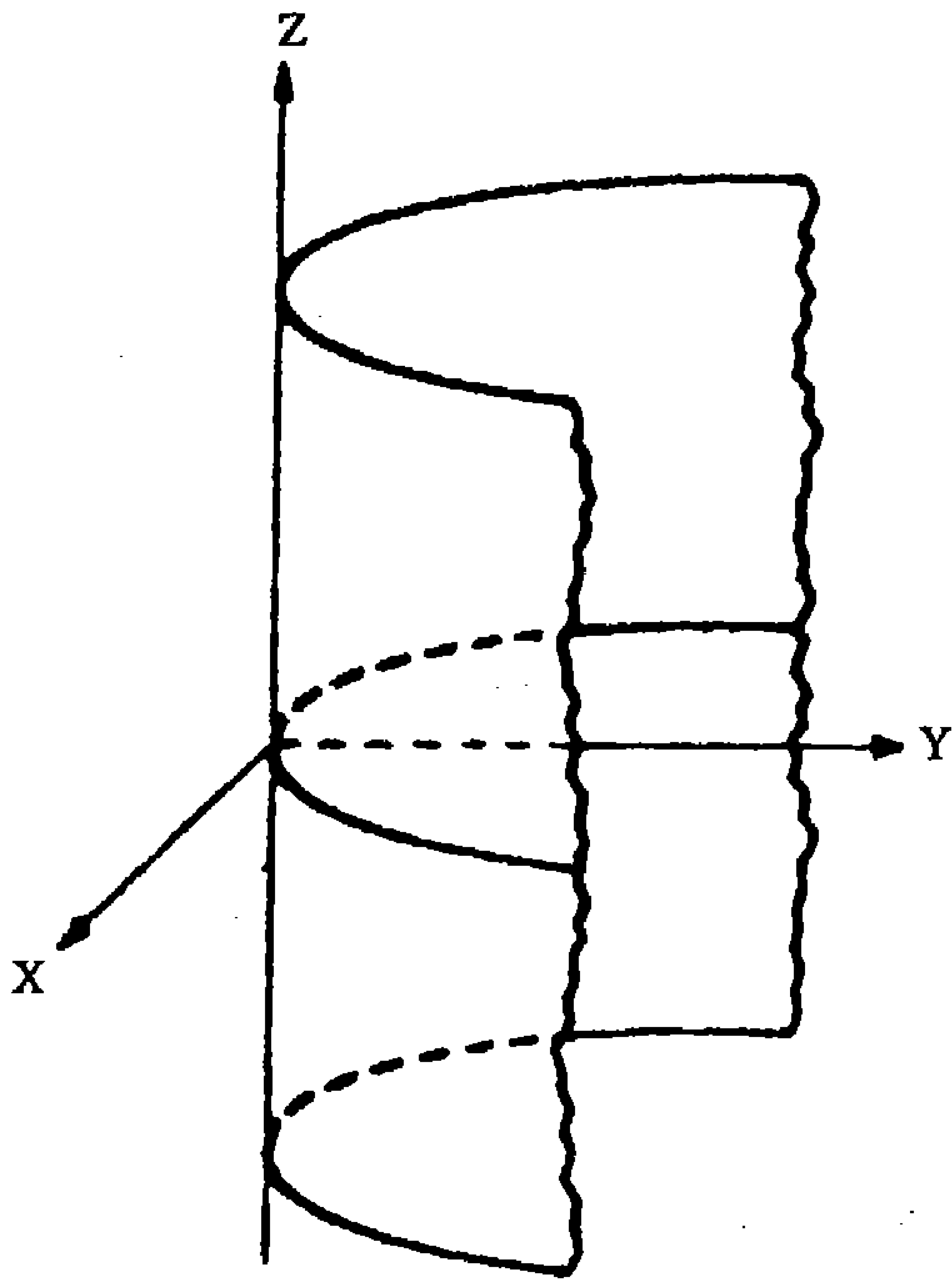
الصور القياسية الأخرى

$x^2 = a\,y + b\,z\,,$

$y^2 = a\,x + b\,z\,,$

$z^2 = a\,x + b\,y \quad ; \quad a\,,b > 0$

على الأقل a أو b لا تساوي الصفر .



سطح اسطوانة زائدي

الصورة القياسية للشكل المناظر

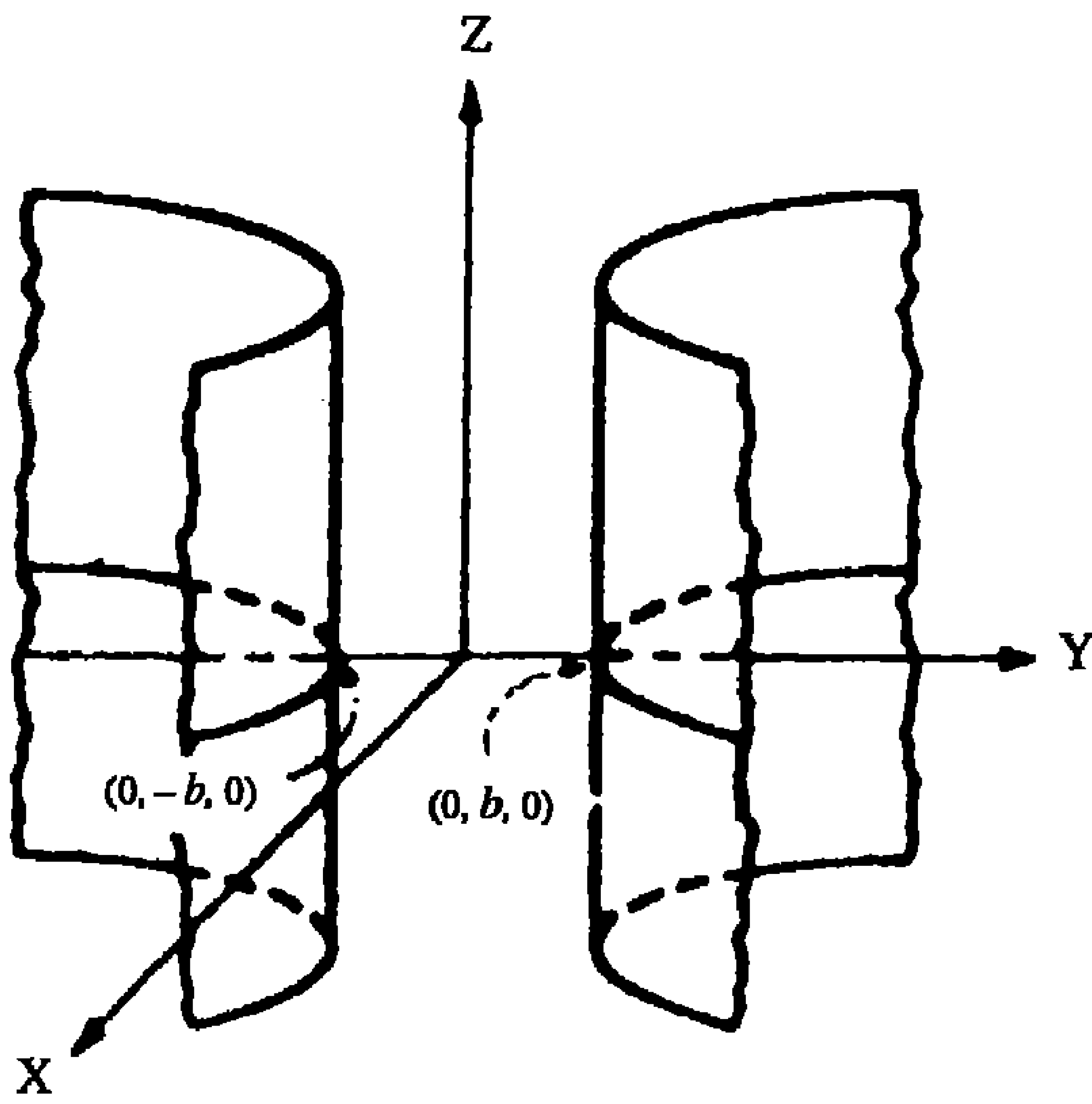
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

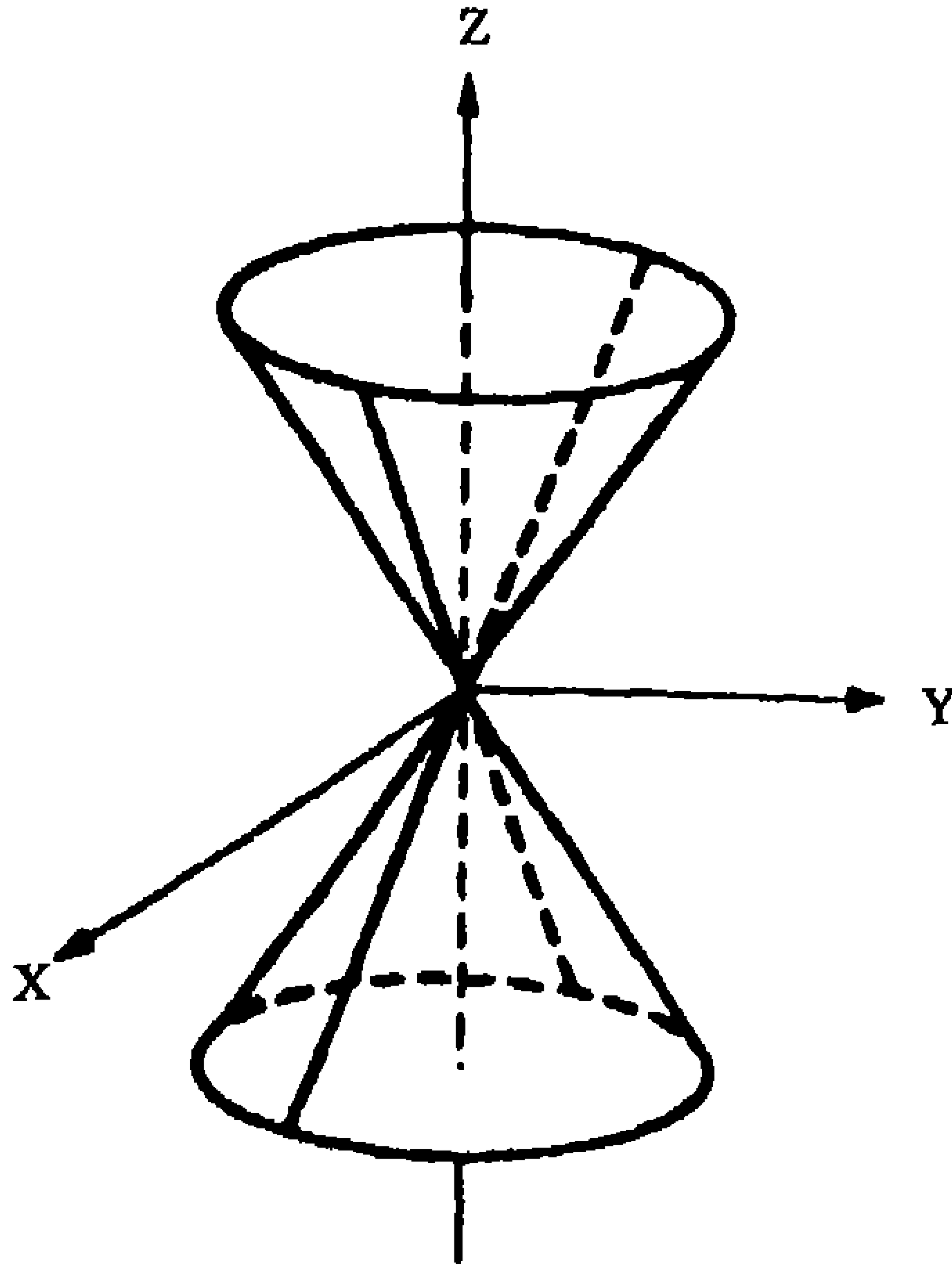
الصورة القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \,,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1 \,,$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1$$





مخروط

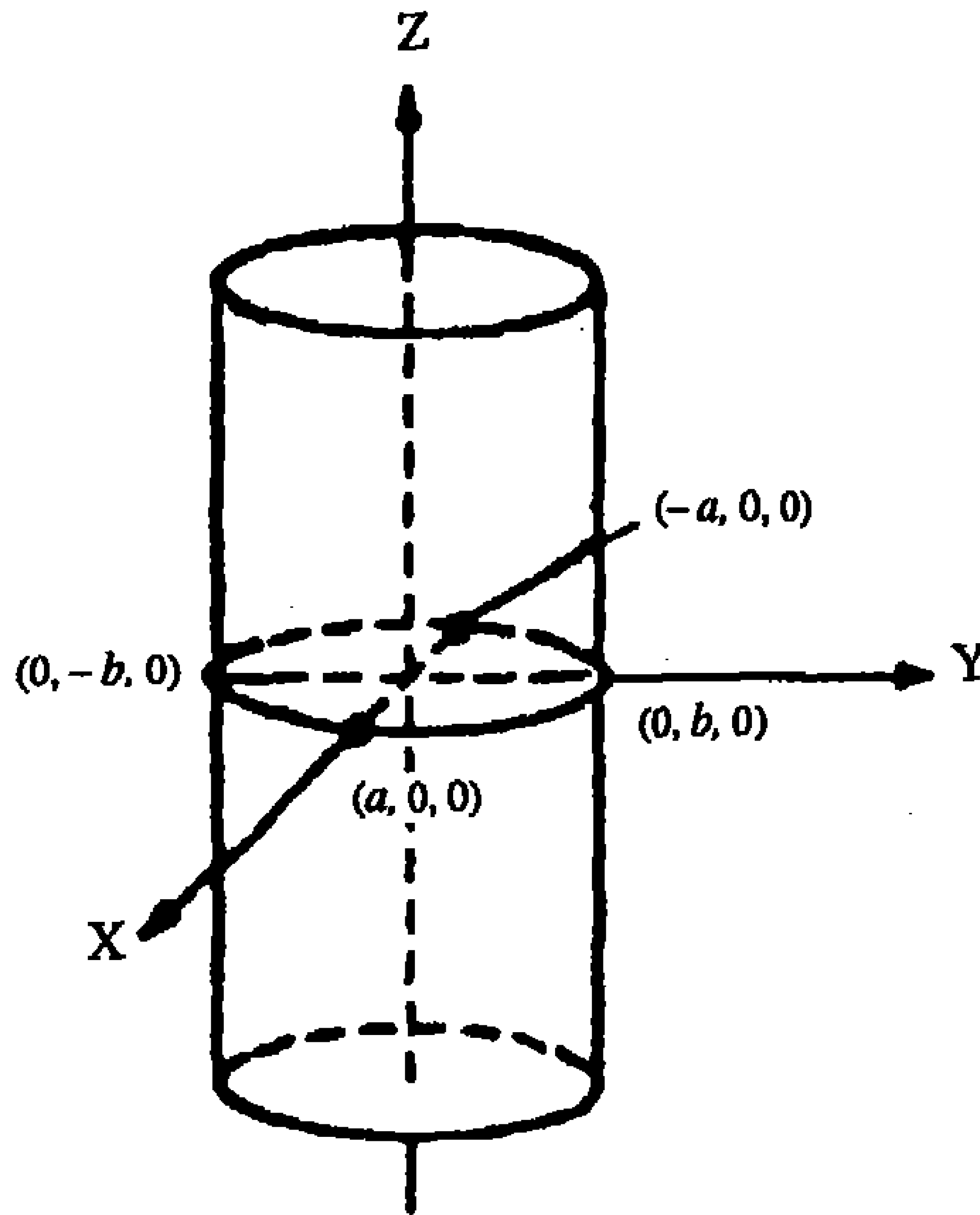
الصورة القياسية للشكل

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

الصور القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \text{ ،}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$



سطح اسطوانة ناقصي

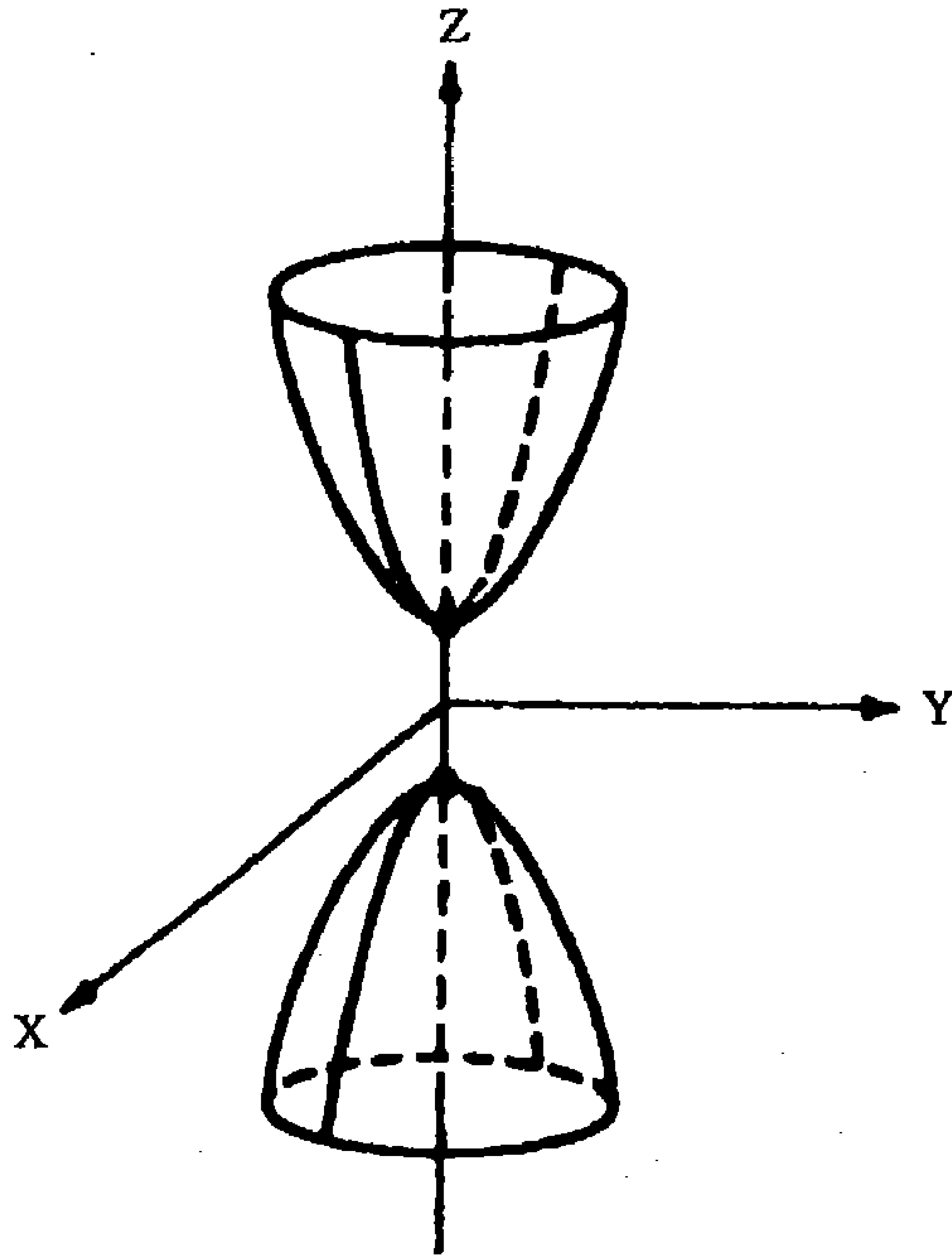
الصورة القياسية للشكل المناظر

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

الصورة القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \, ,$$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



سطح زائد ذو طيتين

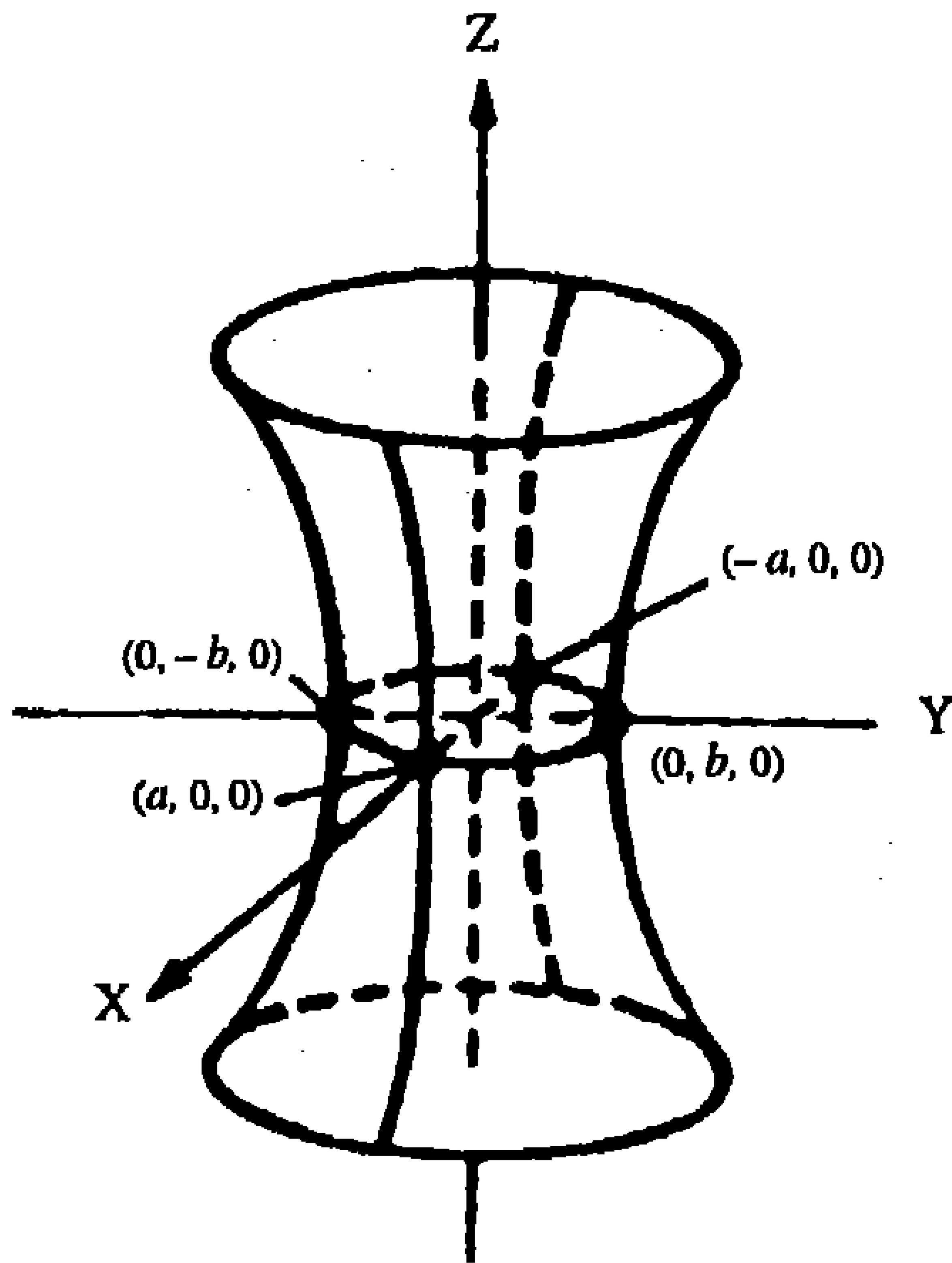
الصورة القياسية للشكل المناظر

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

الصور القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ،}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



سطح زائد ذو طية واحدة

الصورة القياسية للشكل المناظر

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

الصور القياسية الأخرى

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ ،}$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

بكتابة المعادلة (1) في الصورة المصفوفية

$$X^T A X + B X = p \qquad (2)$$

حيث $B = [g \quad h \quad k]$, $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

وتسمى المصفوفة A بمصفوفة الصيغة التربيعية .

تمشياً مع ما تم دراسته في القطوع المخروطية في الجزء السابق فإن تحديد نوع السطح من الدرجة الثانية للمعادلة (1) يعتمد على المصفوفة A ونلخص النقاط التي تهدف إلى تبسيط المعادلة (1) للتعرف على نوع السطح الذي تمثله هذه المعادلة (أي تحويل المعادلة من الصورة العامة إلى الصورة القياسية) كما يلي :

١ - إذا كانت A غير قطرية ، نجري دوران المحاور لحذف أي حد من حدود الدرجة الثانية التي على الصورة xz , yz , xy .

٢ - إذا كانت $B = [g \quad h \quad k] \neq 0$ ، نطبق انتقال المحاور لحذف أي حد من حدود الدرجة الأولى .

فتتحول المعادلة (1) إلى الصورة القياسية

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = q$$

ونوضح ذلك بالأمثلة التالية

مثال (٩ ـ ٢١)

حدود نوع السطح الذي تمثله المعادلة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$$

نلاحظ أن المعادلة تحتوي على حدود من الدرجة الأولى ولذلك نحتاج فقط لإجراء انتقال دون دوران

بإكمال المربع $(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 6z) = 11$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 = 11$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 25$$

بوضع

$$x - 1 = x`$$

$$y + 2 = y`$$

$$z - 3 = z`$$

نحصل على $x`^2 + y`^2 + z`^2 = 25$

وهي تمثل كرة مركزها النقطة $(1, -2, 3)$

مثال (٩ ـ ٢٢) :

حدد نوع السطح الذي تمثله المعادلة

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$$

نلاحظ تواجد الحدود xy , xz , yz وعدم وجود أياً من الحدين x^2, x أو y^2, y أو z^2, z معاً ، ولذلك نجري دوراناً فقط

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية $X^T A X + BX = p$

إذن
$$[x\ \ y\ \ z]\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=5\ \ ,\ \mathbf{B}=0$$

نوجد القيم الذاتية
$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 2 & 2\\ 2 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 2 & 4-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32$$
$$\lambda^3-12\lambda^2+36\lambda-32=0$$
$$(\lambda-2)(\lambda^2-10\lambda+16)=0$$
$$(2-\lambda)\ (\lambda-2)\ (\lambda-8)=0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1=2\ \ ,\ \ \lambda_2=2\ \ ,\ \ \lambda_3=8$

بتطبيق نظرية المحاور الرئيسية فإن المعادلة الأصلية والتي هي صيغة تربيعية تكون مكافئة للصيغة التربيعية الآتية

$$H(X') = \lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2$$
$$= 2x'^2+2y'^2+8z'^2$$

إذن معادلة السطح بالنسبة للمحاور الجديدة هي
$$2x'^2+2y'^2+8z'^2=5$$

أي أن
$$\frac{x'^2}{5/2}+\frac{y'^2}{5/2}+\frac{z'^2}{5/8}=1$$

وهي تمثل سطح ناقص مركزه نقطة الأصل $(0, 0, 0)$ حيث

$$a=\sqrt{5/2}\ \ ,\ \ b=\sqrt{5/2}\ \ ,\ \ c=\sqrt{5/8}$$

مثال (٩ ـ ٢٣)

ادرس السطح الذي تمثله المعادلة

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية

$$X^T A X + BX = p$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}, B = [-5 \quad 3 \quad 0], p = 2$$

نوجد القيم الذاتية

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)[(4-\lambda)(-4-\lambda) - 9]$$

$$= (2-\lambda)(-16 - 4\lambda + 4\lambda + \lambda^2 - 9)$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 25) = (2-\lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

إذن القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 5 \quad , \quad \lambda_3 = -5$

نوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A بحل النظام المتجانس

$$(A - \lambda I_3) X = 0$$

عندما $\lambda = \lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x_2 - 6x_3 = 0$$

$$x_2 = 2x_3$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 2$ هو $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_2 = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$-x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_2 = 3x_3$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 5$ هو $P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

عندما $\lambda = \lambda_3 = -5$

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$7x_1 = 0$$

$$9x_2 + 3x_3 = 0$$

$$x_3 = -3x_2$$

إذن المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = -5$ هو $P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

بكتابة المتجهات الذاتية في الصورة المُعيارية .

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

نكون المصفوفة P مع ملاحظة أننا اخترنا الأعمدة بحيث $|P|=1$

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

بوضع $X = P X'$

$$(P X')^T A (PX') + B (PX') = 2$$

$$X'^T (P^T A P) X' + B (PX') = 2$$

$$[x' \ y' \ z'] \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{10}} [-5 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{10} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 2$$

$$5 x'^2 + 2 y'^2 - 5 z'^2 + \frac{1}{\sqrt{10}} \quad [9 \quad -5\sqrt{10} \quad 3] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = 2$$

$$5 x'^2 + 2 y'^2 - 5 z'^2 + \frac{9}{\sqrt{10}} \ x' - 5 y' + \frac{3}{\sqrt{10}} \ z' = 2$$

وللتخلص من حدود الدرجة الأولى نجري انتقالاً باستخدام إكمال المربع

$$(5 x'^2 + \frac{9x'}{\sqrt{10}}) + (2 y'^2 - 5 y') + (-5 z'^2 + \frac{3}{\sqrt{10}} z') = 2$$

$$5\,(x'^2 + \frac{9}{5\sqrt{10}}\,x') + 2\,(y'^2 - \frac{5}{2}\,y') - 5\,(z'^2 - \frac{3}{5\sqrt{10}}\,z') = 2$$

$$5\,(x' + \frac{9}{10\sqrt{10}})^2 - (\frac{5(81)}{1000}) + 2\,(y' - \frac{5}{4})^2$$

$$-2\,(\frac{25}{16}) - 5\,(z' - \frac{3}{10\sqrt{10}})^2 + 5\,(\frac{9}{1000}) = 2$$

$$5\,(x' + \frac{9}{10\sqrt{10}})^2 + 2\,(y' - \frac{5}{4})^2 - 5\,(z' - \frac{3}{10\sqrt{10}})^2 = \frac{5485}{1000}$$

بوضع

$$x' + \frac{9}{10\sqrt{10}} = x''$$

$$y' - \frac{5}{4} = y''$$

$$z' - \frac{3}{10\sqrt{10}} = z''$$

نحصل على $5\,x''^2 + 2\,y''^2 - 5\,z''^2 = 5.485$

$$\frac{x''^2}{1.097} + \frac{y''^2}{5.485/2} - \frac{z''^2}{1.097} = 1$$

وهي تمثل سطح زائد ذو طية واحدة مركزه النقطة

$$\left(\frac{-9}{10\sqrt{10}} \ , \ \frac{5}{4} \ , \ \frac{3}{10\sqrt{10}} \right)$$

تصنيف سطوح الدرجة الثانية

تعريـــف :

إذا كانت A مصفوفة متماثلة فإن القصور الذاتي للمصفوفة المتماثلة A يعرف بأنه الثلاثية المرتبة (pos, neg, zer)

حيث pos, neg, zer هي عدد القيم الذاتية الموجبة والسالبة والصفرية على الترتيب للمصفوفة A ويرمز له بالرمز $In\,(A)$

مثال (٩ ـ ٢٤) :

أوجد القصور الذاتي للمصفوفات التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4$$

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 4$$

إذن $In\,(A) = (1, 0, 1)$

$$|B - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3$$

إذن $In\,(B) = (2, 0, 0)$

$$|C - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4) - 2(-2\lambda - 4)$$

$$+ 2(4 + 2\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda + 4\lambda + 8 + 8 + 4\lambda$$

$$\lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad , \quad \lambda_2 = -2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$$

إذن $\quad In\,(C) = (1, 2, 0)$

يمكن استخدام تعريف القصور الذاتي للمصفوفة A لتصنيف سطوح الدرجة الثانية تطبيقاً على المصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية $X^T A X$. مع ملاحظة أن إشارة $X^T A X$ هي إشارة الفرق بين عدد القيم الذاتية الموجبة وعدد القيم الذاتية السالبة للمصفوفة A .

أي أن $\quad$ إشارة $X^T A X =$ إشارة $(pos - neg)$

ولاستخدام القصور الذاتي لتصنيف سطوح الدرجة الثانية (أو القطوع المخروطية) نفرض القيم الذاتية للمصفوفة المتماثلة A من النوع $n \times n$ المصاحبة لصيغة تربيعية في n من المجاهيل هي -

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_{pos} > 0$$

$$\lambda_{pos+1} \leq \ldots \leq \lambda_{pos+neg} < 0$$

$$\lambda_{pos+neg+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

حيث λ_1 ترمز لأكبر قيمة ذاتية موجبة ، و λ_{pos} ترمز لأصغر قيمة ذاتية موجبة . بشرط أن $\lambda_1 > 0$ و $p \geq 0$ في (2) للتخلص من الأجزاء الزائدة والحالات غير الممكنة . وهذا ما سنوضحه في المثال التالي :

مثال (٩ ـ ٢٥) :

إذا كانت $p = 5$ ، $B = [0 \quad 0 \quad 0]$ ،
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$
فإن معادلة الدرجة الثانية

$$-x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 5$$

يكون حلها المجموعة الخالية (أي ليس لها حل) وبالتالي فإن السطح الممثل لهذه المعادلة ليست له نقاط .

وإذا كانت $p = -5$ فإن معادلة الدرجة الثانية

$$-x^2 - 2y^2 - 3z^2 = -5$$

أي أن $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$ وبالتالي فإن تطبيق الشرط $\lambda_1 > 0$ ، $p \geq 0$ أمكننا التخلص من الحالات الغير ممكنة

مثال (٩ ـ ٢٦) :

بفرض الصيغة التربيعية في متغيرين x, y وعند حساب القصور الذاتي للمصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية بشرط $\lambda_1 > 0$ ، $f \geq 0$ في المعادلة (1) في ثالثاً وجد أن هناك ثلاثة احتمالات فقط للقصور الذاتي يمكن استخدامهم لتصنيف القطع المخروطي المناظر الذي تمثله الصيغة التربيعية كما يتضح من الجدول التالي :

In (A)	اسم القطع المخروطي
(2, 0, 0)	قطع ناقص
(1, 1, 0)	قطع زائد
(1, 0, 1)	قطع مكافئ

نلاحظ أن تصنيف القطوع المخروطية في هذا الجدول لا يفرق بين الحالات الخاصة داخل الصنف الهندسي الواحد فمثلاً كل من $y^2 = x$, $x^2 = y$ لها نفس القصور الذاتي (1, 0, 1) .

وبالمثل من الصيغة التربيعية في ثلاث متغيرات x, y, z عند حساب القصور الذاتي للمصفوفة المتماثلة A المصاحبة للصيغة التربيعية بشرط $\lambda_1 > 0$ ، و $p \geq 0$ في (1) وجد أن هناك ست احتمالات للقصور الذاتي يمكن استخدامهم لتصنيف سطح الدرجة الثانية المناظر الذي تمثله الصيغة التربيعية كما يتضح من الجدول التالي :

In (A)	اسم سطح الدرجة الثانية
(3, 0, 0)	سطح ناقص
(2, 0, 1)	سطح مكافئ ناقصي
(2, 1, 0)	سطح زائد ذو طية واحدة
(1, 2, 0)	سطح زائد ذو طيتين
(1, 0, 2)	سطح أسطوانة مكافئ
(1, 1, 1)	سطح مكافئ زائدي

وكما سبق فإن تصنيف سطوح الدرجة الثانية في هذا الجدول لا يميز بين الحالات المختلفة داخل الصنف الهندسي الواحد . أي لها نفس القصور الذاتي .

مثال (٩ ـ ٢٧) :

حدد نوع السطح الذي تمثله الصيغة التربيعية $X^T A X = 3$

حيث
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \quad , \quad \lambda_2 = -2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$$

$$In\,(A) = (1, 2, 0)$$

إذن الصيغة التربيعية تمثل سطح زائد ذو طيتين .

مثال (٩ ـ ٢٨) :

صنف سطح الدرجة الثانية الذي تمثله المعادلة

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2$$

بكتابة الصيغة التربيعية المناظرة لهذه المعادلة نحصل على

$$X^T A X = 2$$

حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda = 5 \quad , \quad \lambda_3 = -5$$

$$In\,(A) = (2, 1, 0)$$

إذن الصيغة التربيعية تمثل سطح زائد ذو طية واحدة .

تمـــاريـــن (٩)

١ - في كل مما يأتي أوجد معادلة المستقيم في $\mathbb{R}^2$ المحدد بالنقط التالية :

(i) $P_1(-2, -3)$, $P_2(3, 4)$

(ii) $P_1(0, 0)$, $P_2(-3, 5)$

(iii) $P_1(2, -4)$, $P_2(-3, -4)$

(iv) $P_1(1, 2)$, $P_2(1, 3)$

٢ - حدد أي من النقاط التالية تقع على المستقيم

$$x = 3 + 2t$$
$$y = -2 + 3t \qquad (-\infty < t < \infty)$$
$$z = 4 - 3t$$

(i) $(1, -1, 0)$ (ii) $(1, 1, 1)$

(iii) $(4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ (iv) $(1, 0, -2)$

٣ - أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ والموازي للمتجه S في كل مما يأتي :

(i) $P_0(3, 4, -2)$, $S = (4, -5, 2)$

(ii) $P_0(-2, -3, 1)$, $S = (2, 3, 4)$

(iii) $P_0(3, 2, 4)$, $S = (-2, 5, 1)$

٤ - أوجد المعادلات البارامترية وكذلك المعادلة في الصورة المتماثلة للمستقيم الواصل بين كل نقطتين فيما يأتي :

(i) $(2, -3, 1)$, $(4, 2, 5)$

(ii) $(-2, 3, 4)$, $(2, -3, 5)$

(iii) $(0, 0, 0)$, $(4, 5, 2)$

٥ - في كل مما يأتي أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة والعمودي على المتجه N .

(i) $(0, 2, -3)$, $N = (3, -2, 4)$

(ii) $(-1, 3, 2)$, $N = (0, 1, -3)$

(iii) $(5, 2, 3)$, $N = (-1, -2, 4)$

٦ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقط الثلاث في كل مما يأتي :

(i) $(0, 1, 2)$, $(3, -2, 5)$, $(2, 3, 4)$

(ii) $(1, 2, 3)$, $(0, 0, 0)$, $(-2, 3, 4)$

(iii) $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(-5, 3, 2)$

٧ - أوجد المعادلات البارمترية لخط تقاطع المستويين

$$2x + 3y - 4z + 5 = 0 \quad , \quad -3x + 2y + 5z + 6 = 0$$

٨ - أوجد زوج المستويات الذي خط تقاطعهما هو المستقيم

$$x = 2 - 3t \quad , \quad y = 3 + t \quad , \quad z = 2 - 4t$$

٩ - أثبت أن المعادلات البارامترية الآتية تمثل نفس المستقيم

$$x = -1 - 9t \quad , \quad x = 2 + 3t$$
$$y = 5 + 6t \quad , \quad y = 3 - 2t$$
$$z = -5 - 12t \quad , \quad z = -1 + 4t$$

١٠- أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $(3, -1, -3)$ والعمودي على المستقيم الواصل بين $(3, -2, 4)$, $(0, 3, 5)$

١١- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(-2, 3, 4)$ وعمودياً على المستقيم المار بالنقطتين $(4, -2, 5)$, $(0, 2, 4)$.

١٢ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(2, 4, -3)$ وموازياً للمستوى

$$-2x + 4y - 5z + 6 = 0$$

١٣- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-2, 5, -3)$ وعمودياً على المستوى

$$2x - 3y + 4z + 7 = 0$$

١٤- أوجد المسافة بين النقطة $(2, 3, -1)$ والمستوى $3x - 2y + z = 0$

١٥- اكتب الصيغة التربيعية في الصورة $X^T A X$ لكل مما يأتي

(i) $-3x^2 + 5xy - 2y^2$

(ii) $3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1 x_2 - x_1 x_3 - 4x_2 x_3$

(iii) $-2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 6x_2 x_3$

(iv) $x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 x_2 + 6x_2 x_3$

١٦- أوجد صيغة تربيعية مكافئة لكل من :

(i) $2x^2 - 4xy - y^2$

(ii) $-2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2 x_3$

(iii) $2x_1 x_3$

١٧- أي من الصيغ التربيعية الآتية تكون متكافئة

$$F_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2$$

$$F_2(x) = 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 x_3$$

$$F_3(x) = 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2 x_3$$

$$F_4(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2 x_3$$

١٨- تعرّف محدداً اسم كل قطع مخروطي في كل مما يأتي :

(i) $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$

(ii) $9x^2 + 4y^2 + 36 = 0$

(iii) $y^2 - 4y = 0$

(iv) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$

(v) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

(vi) $x^2 + xy + y^2 = 6$

١٩- عيِّن الانتقال الذي يحول القطع المخروطي إلى صورته القياسية في كل مما يأتي

(i) $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

(ii) $4x^2 + 5y^2 - 30y + 25 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$

(iv) $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$

٢٠- عيِّن الدوران الذي يحول القطوع المخروطية التالية إلى الصورة القياسية مع ذكر اسم كل قطع :

(i) $9x^2 + y^2 + 6xy = 4$

(ii) $4x^2 + 4y^2 - 10xy = 0$

(iii) $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$

٢١- صف القطوع المخروطية التالية واكتبها في الصورة القياسية

(i) $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}\,x + 10\sqrt{10}\,y + 90 = 0$

(ii) $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}\,x = 36$

(iii) $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 6x = 0$

(iv) $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}\,x + 18\sqrt{2}\,y + 82 = 0$

(v) $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}\,x - 31\sqrt{2}\,y + 70 = 0$

٢٢- أوجد القصور الذاتي للمصفوفة A المصاحبة للصيغة التربيعية

(i) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz + 4x = 8$

(ii) $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 6x - 6y + 4z - 2 = 0$

(iii) $y^2 - z^2 - 9x - 4y + 8z - 12 = 0$

(iv) $4x^2 - y^2 + z^2 - 16x + 8y - 6z + 5 = 0$

(v) $x^2 - 4z^2 - 4x + 8z = 0$

٢٣- اكتب معادلة سطوح الدرجة الثانية التالية في الصورة القياسية مع ذكر اسم كل سطح .

(i) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1$

(ii) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 16$

(iii) $2xz - 2x - 4y - 4z + 8 = 0$

(iv) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4yz = 9$

(v) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 8$

(vi) $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 3$

(vii) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 = 0$

(viii) $-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz = 24$

أجوبة تمارين الكتاب

تمـــاريـــن (١)

١ - المعادلات الخطية في x_1 , x_2 , x_3 هي (iii) , (ii) .

٢ -

(i)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

(ii)
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

(iii)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

٣ -

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 &= 3 \\ -x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

٤ - المصفوفة الوحيدة التي على الشكل الصفي المميز المختزل هي (v)

٥ - المصفوفات التي على الشكل الصفي المميز هي (v) , (i)

٦ -

(i)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

النظام الخطي المناظر للمصفوفة الموسعة هو

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 3x_4 &= 2 \\ x_2 \quad - x_4 &= 4 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

حيث إن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل فإننا نحصل على عدد لا نهائي من الحلول . يعطي الحل للمتغيرات x_1 , x_2 , x_3 بدلالة x_4 حيث x_1 , x_2 , x_3 تسمى بالمتغيرات المتقدمة حيث إنها تناظر الآحاد المتقدمة

$$x_1 = 2 - 3x_4 \quad , \quad x_2 = 4 + x_4 \quad , \quad x_3 = 2 - x_4$$

وبإعطاء x_4 قيمة اختيارية ولتكن $x_4 = k$ نحصل على

$$x = 2 - 3k \quad , \quad x_2 = 4 + k \quad , \quad x_3 = 2 - k \quad , \quad x_4 = k.$$

(ii)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 4 \\ x_2 \quad &= 3 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

أي نحصل على حل وحيد $x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_3 = 2$

(iii)
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 \qquad + 5x_5 &= -1 \\ x_3 \quad + 3x_5 &= 1 \\ x_4 + 4x_5 &= 2 \end{aligned}$$

وتكون x_1 , x_3 , x_4 المتغيرات المتقدمة ويعطي الحل بدلالة التغيرات الباقية x_2 , x_5 (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل يناظره عدد لا نهائي من الحلول) .

$$x_1 = -1 - 5x_2 - 5x_5 \quad , \quad x_3 = 1 - 3x_5 \quad , \quad x_5 = 2 - 4x_5$$

وبفرض $x_5 = l$ ، $x_2 = k$ حيث k , l قيماً اختيارية نحصل على

$$x_1 = -1 - 5k - 5l \;,\; x_2 = k \;,\; x_3 = 1 - 3l \;,\; x_4 = 2 - 4l \;,\; x_5 = l.$$

(iv)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

المعادلة الأخيرة في نظام المعادلات المناظرة جميع معاملاتها أصفار وحدها المطلق يساوي 1 وبالتالي فإن مجموعة المعادلات ليس لها حل (متناقضة) .

٧ -

(i)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 4x_3 + 7x_4 &= 10 \\ x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -2 \\ x_3 + \ \ x_4 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل (عدد لا نهائي من الحلول)

نفرض $x_4 = k$ حيث k أي قيمة اختيارية نحصل على

$$x_1 = 2 - 3k \quad , \quad x_2 = 4 + k \quad , \quad x_3 = 2 - k, \quad x_4 = k.$$

(ii)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= \ \ 2 \\ x_2 - 2x_3 &= -1 \\ x_3 &= \ \ 2 \end{aligned}$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على $x_3 = 2$ وبالتعويض في المعادلة الثانية ثم المعادلة الأولى نحصل على مجموعة الحل الوحيد

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad x_3 = 2.$$

(iii)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

المعادلة الأخيرة في نظام المعادلات المناظرة جميع معاملاتها أصفار وحدها المطلق يساوي 1 وبالتالي فإن مجموعة المعادلات ليس لها حل (متناقضة) .

$$(iv) \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 4x_3 \qquad - 7x_5 &= -5 \\ x_3 + x_4 + 7x_5 &= 3 \\ x_4 + 4x_5 &= 2 \end{aligned}$$

عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل فنحصل على عدد لا نهائي من الحلول

ويفرض $x_5 = l$, $x_2 = k$ نحصل على

$$x_1 = 1 - 5x - 5l \;,\; x_2 = k \;,\; x_3 = 1 - 3l \;,\; x_4 = 2 - 4l \;,\; x_5 = l$$

٨ -

$$(i) \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_2 \to -4R_1 + R_2 \\ R_3 \to -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} R_2 \to \frac{-1}{7} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} R_3 \to 2R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & \frac{-29}{7} \end{bmatrix} \quad R_3 \to -\frac{7}{29} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \to -2R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{8}{7} \\ 0 & 1 & \frac{-11}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_1 \to \frac{-8}{7} R_3 + R_1 \\ R_3 \to \frac{11}{7} R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٩ - (i)

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to -R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

(أ) لكي يكون للنظام حل وحيد فإن

$a^2 - 4 \neq 0$ وبالتالي فإن $a \neq \pm 2$ وفي هذه الحالة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right] \quad R_1 \rightarrow -R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow 3R_3 + R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a+5)/(a+2) \\ 0 & 1 & 0 & a/(a+2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(a+2) \end{array}\right]$$

$$x = (a+5)/(a+2) \quad , \quad y = a/(a+2) \quad , \quad z = 1/(a+2)$$

(ب) كي يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول فإن

$a^2 - 4 = 0$, $a - 2 = 0$ أي أن $a = 2$

وفي هذه الحالة نحصل على معادلتين فقط

$$x + y - z = 2$$
$$y + 2z = 1$$

ويفرض $z = k$ نحصل على

$$x = 1 + 3k \quad , \quad y = 1 - 2k \quad , \quad z = k$$

(حـ) كي لا يكون للنظام حل فإن

$a^2 - 4 = 0$, $a - 2 \neq 0$ أي أنه $a = -2$.

(ii) (أ) حل وحيد عندما $a \neq \pm 4$

ويكون الحل الوحيد هو

$$x = (8a + 25)/7(a+4) \quad , \quad y = (10a + 54)/7(a+4) \quad , \quad z = 1/(a+4)$$

(ب) يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول عندما $a = 4$

وتكون الصورة العامة هي

$$x = (8 - 7k)/7 \quad , \quad y = (10 + 14k)/7 \quad , \quad z = k$$

(حـ) لا يوجد حل للنظام عندما $a = -4$

(iii) (أ) حل وحيد عندما $a \neq \pm 3$

ويكون الحل الوحيد هو

$$x = (7a + 19)/2(a+3) \quad , \quad y = -(a-1)/2(a+3) \quad , \quad z = 1/(a+3)$$

(ب) يكون للنظام عدد لا نهائي من الحلول عندما $a = 3$

وتكون الصورة العامة هي

$$x = (7 - 2k)/2 \quad , \quad y = (4k - 1)/2 \quad , \quad z = k$$

(حـ) لا يوجد حل للنظام عندما $a = -3$

١٠ - (i)

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ثم نجري العمليات الصفية البسيطة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to -R_1 + R_2 \\ R_3 \to -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] R_2 \to (-1) \times R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array}\right] R_3 \to 3R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right] R_3 \to \frac{-1}{5} \times R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] R_1 \to -2R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to -3R_3 + R_1 \\ R_2 \to 2R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

وبذلك نحصل على الحل الوحيد $x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3$

(ii)

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ثم نجري العمليات الصفية

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \quad R_1 \to \frac{1}{2} \text{x}\, R_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to -3R_1 + R_2 \\ R_3 \to -5R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right] \quad R_2 \to 2R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_3 \to \frac{-1}{2} R_2 + R_1 \\ R_3 \to \frac{-3}{2} R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 19 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{array}\right] \quad R_3 \to \frac{-1}{7} R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 19 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_1 \to 6R_3 + R_1 \\ R_2 \to 10R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

ويذلك نحصل على الحل الوحيد $x_3 = -3$, $x_2 = 2$, $x_1 = 1$

(iii)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 14 \end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ثم نجري العمليات الصفية البسيطة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right] R_3 \rightarrow -R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_2 \rightarrow \frac{-1}{5} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر هو

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

نلاحظ أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل وبذلك نحصل على عدد لا نهائي من الحلول . وبفرض $x_3 = k$ فتكون الصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات الأصلية هي

$$x_1 = 2 - k \quad , \quad x_2 = 2 + 2k \quad , \quad x_3 = k.$$

(iv)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

نكون المصفوفة الموسعة لهذا النظام ثم نجري العمليات الصفية البسيطة

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -4R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right] R_3 \to -R_2 + R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

عند هذه الخطوة يكتفى بعمليات الحذف حيث إنه من الصف الأخير نلاحظ أنه توجد معادلة جميع معاملاتها أصفار وحدها المطلق يساوي 8- وعلى ذلك فإن المجموعة الأصلية متناقضة (أي ليس لها حل) .

(i) ١١ - مجموعة المعادلات لها الحل الصفري

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

(ii)

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0$$

نظراً لأن المعادلات متجانسة فإننا نكون مصفوفة المعاملات ثم نجري العمليات الصفية البسيطة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -3R_1 + R_2 \\ R_3 \to -4R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -11 & 10 \\ 0 & 11 & -7 & 10 \end{bmatrix} R_2 \to (-1) \times R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 11 & -7 & 10 \end{bmatrix} R_3 \to (-11) R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & -128 & 120 \end{bmatrix} R_3 \to \frac{-1}{8} \times R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 16 & -15 \end{bmatrix}$$

يكتفى عند هذه الخطوة بإجراء العمليات الصفية وحيث إن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل فإنه يكون عدداً لا نهائياً من الحلول ونحصل على مجموعة المعادلات المناظرة

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_2 + 11x_3 - 10x_4 = 0$$
$$16x_3 - 15x_4 = 0$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على $x_3 = \frac{15}{16} x_4$ ويفرض $x_4 = k$

إذن $x_3 = \frac{15}{16} k$ وبالتعويض في المعادلة الثانية $x_2 = \frac{-5}{16} k$

وأخيراً من المعادلة الأولى $x_1 = \frac{-23}{16} k$

وتكون المجموعة $\left(\frac{-23k}{16}, \frac{-5k}{16}, \frac{-15k}{16}, k\right)$ هي الصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات الأصلية .

١٢ - حل وحيد هو (i)

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 1 \quad , \quad x_3 = 3$$

المجموعة لها عدد لا نهائي من الحلول (ii)

والصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات هي

$$\left(\frac{-3}{7} k \; , \; \frac{-4}{7} k, k\right).$$

المجموعة لها عدد لا نهائي من الحلول (iii)

والصورة العامة لحلول مجموعة المعادلات هي

$$(0, -3k, k)$$

المجموعة متناقضة أي ليس لها حل . (iv)

تمـــاريـــن (٢)

١ - $A = [a_{ij}]$ من النوع 3 x 4

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 3 \times 1 - 1 = 2$ $\quad a_{21} = 3 \times 2 - 1 = 5$ $\quad a_{31} = 8$

$a_{12} = 3 \times 1 - 2 = 1$ $\quad a_{22} = 3 \times 2 - 2 = 4$ $\quad a_{32} = 7$

$a_{13} = 3 \times 1 - 3 = 0$ $\quad a_{23} = 3 \times 2 - 3 = 3$ $\quad a_{33} = 6$

$a_{14} = 3 \times 1 - 4 = -1$ $\quad a_{24} = 3 \times 2 - 4 = 2$ $\quad a_{34} = 5$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

٢ -
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

٣ - (v)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(vi)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

٤ -

(i) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & c \end{bmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة نجد أن

$$a_{11} = -2 \quad , \quad a_{12} = 1 \quad , \quad a_{21} = 4 \quad , \quad c = 3.$$

(ii) $$\begin{bmatrix} 2a+6 & 3b-7 & 2c-3 \\ 2d & 4e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

بمساواة العناصر المتناظرة نحصل على

$$2a + 6 = -1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{-7}{2}$$

$$3b - 7 = 4 \quad \rightarrow \quad b = \frac{11}{3}$$

$$2c - 3 = 5 \quad \rightarrow \quad c = 4$$

$$2d = 3 \quad \rightarrow \quad d = \frac{3}{2}$$

$$4e = 2 \quad \rightarrow \quad e = \frac{1}{2}$$

(iii) $x = \frac{-1}{2} \quad , \quad y = \frac{1}{3}$

(iv) $a = 3 \quad , \quad b = 1 \quad , \quad c = 8 \quad , \quad d = -2$

(v) $a = 0 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = 1 \quad , \quad d = 2.$

٦ –

$$AB = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$$

إذن $AB = AC$

٧ –

(i) $$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) $$3A - 4B = 3\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -9 & 12 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 16 & 36 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -5 & 12 \\ -16 & -33 & -14 \end{bmatrix}$$

(iii) $$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

(iii) $-6\,(2A+B) = -6\left(2\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}\right)$

$$= -6\begin{bmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -42 & 42 & -48 \\ -24 & -66 & -54 \end{bmatrix}$$

(i) $-A = [-4 \quad 5i \quad -8\,]$ — ٨

(ii) $iA = [\;4i \quad 5 \quad 8i\,]$

(iii) $-iA = [-4i \quad -5 \quad -8i\,]$

(i) $iA = \begin{bmatrix} 4i+3 & -1 & 2 \\ i & 0 & -3 \\ 2i-1 & 5i & -3i+1 \end{bmatrix}$ — ٩

(ii) $-iA = \begin{bmatrix} -4i-3 & 1 & -2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2i+1 & -5i & 3i-1 \end{bmatrix}$

(iii) $I_3 - iA = \begin{bmatrix} -4i-2 & 1 & -2 \\ -i & 1 & 3 \\ -2i+1 & -5i & 3i \end{bmatrix}$

(iv) $2A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 11-6i & 2i & -4i \\ 2 & 3 & 6i \\ 4+2i & 10 & -3-2i \end{bmatrix}$

(v) $$I_3 - A = \begin{bmatrix} -3+3i & -i & 2i \\ -1 & 1 & -3i \\ -2-i & -5 & 4+i \end{bmatrix}$$

(vi) $$A + I_3 = \begin{bmatrix} 5-3i & i & -2i \\ 1 & 1 & 3i \\ 2+i & 5 & -2-i \end{bmatrix}$$

-١٠

(1) $$A(BD) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 0 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(AB)D = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 4 \\ 66 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) لا يمكن إيجاد المقدار $2B - 3F$ لأن المصفوفتين B, F
ليس من نفس النوع

(3) $$A(C+E) = AC + AE = \begin{bmatrix} 28 & 8 & 38 \\ 34 & 4 & 41 \end{bmatrix}$$

(4) لا يمكن إيجاد المقدار $EB + FA$ لأن المصفوفتين EB, FA
ليس من نفس النوع لأن FA من النوع 2×3 , EB من النوع 3×2 .

(5) $$3A + 2A = 5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

(6) $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , (A^T)^T = A$$

(7) $$(C+E)^T = C^T + E^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -5 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

(8) $$(AB)^T = B^T A^T = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(9) $$(2D + 3F)^T = \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 11 & 17 \end{bmatrix}$$

(10) لا يمكن إيجاد المقدار $(2BC + F)^T$ لأنه لا يمكن الحصول على
حاصل الضرب BC لعدم توافر الشرط اللازم لإجراء الضرب .

(11) $$B^T C + A = \begin{bmatrix} 18 & 6 & 25 \\ 14 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

(12) $$(2E)\ A^T = \begin{bmatrix} 18 & 40 \\ 28 & 34 \\ 20 & 24 \end{bmatrix}$$

(13) $$(B^T + A)\ C = \begin{bmatrix} 34 & 8 & 44 \\ 26 & 6 & 34 \end{bmatrix}$$

(14) لا يمكن إيجاد المقدار $(D^T + E)\ F$ لأن المصفوفتين D^T, E ليس من نفس النوع

١٤ -

(i) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_1 \to (-1) \times R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to -3\,R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 3 & 1 \end{array}\right] \quad R_2 \to \frac{1}{14} \times R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{array}\right] \quad R_1 \to 4\,R_2 + R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-2}{14} & \frac{4}{14} \\ 0 & 1 & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{array}\right]$$

إذن

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{4}{14} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

(ii)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} d/(a\,d - b\,c) & -b/(a\,d - b\,c) \\ -c/(a\,d - b\,c) & a/(a\,d - b\,c) \end{bmatrix}$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \rightarrow -3\,R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \rightarrow \frac{-1}{2} R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \rightarrow -2\,R_2 + R_1 \\ R_3 \rightarrow -5\,R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{-15}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] R_3 \rightarrow \frac{1}{3}\,R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to -R_3 + R_1 \\ R_2 \to -R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} \\ 4 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-5}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(iv) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

-١٥

(i)
$$x - y - 7 = 0$$
$$3x + 2y + 4 = 0$$

$$x - y = 7$$
$$3x + 2y = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x = 2 \quad , \quad y = -5$$

(ii) $x = 1 \quad , \quad y = 2$

(iii)

$$x + y - z = 1$$

$$2x + y + z = 7$$

$$x - 5y + 3z = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -\ R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \to (-1)\ R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to -\ R_2 + R_1 \\ R_3 \to 6\ R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 11 & -6 & 1 \end{array}\right] R_3 \to \frac{-1}{14}\ R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-11}{14} & \frac{6}{14} & \frac{-1}{14} \end{array}\right] \begin{array}{l} R_1 \to -2R_3 + R_1 \\ R_2 \to \ \ 3R_3 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{14} & \frac{2}{14} & \frac{2}{14} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{14} & \frac{4}{14} & \frac{-3}{14} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-11}{14} & \frac{6}{14} & \frac{-1}{14} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{14} & \frac{2}{14} & \frac{2}{14} \\ \frac{-5}{14} & \frac{4}{14} & \frac{-3}{14} \\ \frac{-11}{14} & \frac{6}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x=2 \quad , \quad y=1 \quad , \quad z=2$

(iv) $x=\frac{7}{8} \quad , \quad y=\frac{5}{12} \quad , \quad z=1$

(v) $x=-5 \quad , \quad y=9 \quad , \quad z=-1$

١٦ - لكي تكون العمليات قابلة للأداء نفرض المصفوفات التالية (i)

A من النوع $m \times n$ ، B , C من النوع $n \times p$ أي أن

$$A=[a_{ij}] \;,\; 1 \le i \le m \;,\; 1 \le j \le n$$
$$B=[b_{jk}] \;,\; 1 \le j \le n \;,\; 1 \le k \le p$$
$$C=[c_{jk}] \;,\; 1 \le j \le n \;,\; 1 \le k \le p$$

الطرف الأيسر $A(B+C)$

$$\begin{aligned} B+C &= [b_{jk}]+[c_{jk}] \\ &= [b_{jk}+c_{jk}] \\ &= [d_{jk}] = D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(B+C) = A.D &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, d_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (b_{jk}+c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}\, b_{jk} + a_{ij}\, c_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{jk} \\ &= AB + AC \end{aligned}$$

(ii) بنفس الطريقة يمكن إثبات أن $(B+C)A = BA + CA$

ويترك للدارس كتمرين .

١٧ - (أ) بما أن المصفوفة A قابلة للانعكاس
إذن يوجد لها معكوس A^{-1} ومن خواصه أن

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

من هذا الشرط يتضح أنه إذا كان معكوس المصفوفة A هو المصفوفة A^{-1} فإن معكوس المصفوفة A^{-1} هو المصفوفة A .
أي أن

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(ب) يترك للدارس كتمرين

(حـ) بفرض المصفوفة A قابلة للانعكاس أي لها معكوس A^{-1} حيث

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

والمطلوب هنا إثبات أن نظير kA يساوي $\frac{1}{k} A^{-1}$

أي المطلوب إثبات أن

$$(kA)\left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{k} A^{-1}\right)(kA) = I$$

$$(kA)\left(\frac{1}{k} A^{-1}\right) = \left(k. \frac{1}{k}\right)(A \cdot A^{-1}) = 1.(A \cdot A^{-1}) = I$$

$$\left(\frac{1}{k} A^{-1}\right).(kA) = \left(\frac{1}{k} .k\right)(A^{-1} . A) = 1.(A^{-1}. A) = I$$

إذن $$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

(د) المطلوب إثبات أن نظير مدور المصفوفة A يساوي مدور نظير المصفوفة A أي أن

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

أي المطلوب إثبات أن $(A^{T}).(A^{-1})^{T} = (A^{-1})^{T}.(A^{T}) = I$

باستخدام نظرية (٢ - ٤) $(A^T) . (A^{-1})^T = (A^{-1} . A)^T$

باستخدام خاصية المعكوس $= (I)^T = I$

باستخدام نظرية (٢ - ٤) $(A^{-1})^T . (A)^T = (A . A^{-1})^T$

باستخدام خاصية المعكوس $= (I)^T = I$

إذن $(A^T) . (A^{-1})^T = (A^{-1})^T . A^T = I$

أي أن $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

١٨- بما أن $A^2 - 3A + I = 0$

إذن $3A - A^2 = I$

$$A(3I - A) = I$$

وبالمثل $(3I - A) A = I$

إذن $A(3I - A) = (3I - A) A = I$

أي أن $A^{-1} = 3I - A$

١٩- يترك كتمرين للدارس .

٢٠- المطلوب إثبات أن النظام $AX = 0$ له الحل الصفري إذا - وفقط إذا - كان للنظام $(QA) X = 0$ الحل الصفري فقط .

حيث Q مصفوفة قابلة للانعكاس .

البرهان:

أولاً : نفرض أن النظام $A\,X = 0$ له الحل الصفري فقط ونحاول إثبات أن النظام $(QA)\,X = 0$ له الحل الصفري فقط .

$$(QA)\,X = 0$$

باستخدام الخاصية التجميعية

$$Q\,(AX) = 0$$

$$Q^{-1}\,Q\,(AX) = Q^{-1}\,.\,0$$

$$I\,(AX) = 0$$

$$A\,X = 0$$

$$X = 0$$ ومن الفرض

إذن النظام $(QA)\,X = 0$ له الحل الصفري فقط .

ثانياً : نفرض النظام $(QA)\,X = 0$ له الحل الصفري فقط ونحاول إثبات أن النظام $AX = 0$ له الحل الصفري فقط .

(يترك للدارس كتمرين) .

٢١- المطلوب إثبات أنه إذا كانت A مصفوفة مربعة من النوع $n \times n$.
فإن النظام $A\,X = 0$ يكون له حل غير الحل الصفري إذا - وفقط إذا - كانت A مصفوفة غير قابلة للانعكاس .

البرهان:

أولاً : نريد إثبات أنه إذا كان النظام $A\,X = 0$ له حل غير الحل الصفري فإن المصفوفة A تكون غير قابلة للانعكاس . فإذا استطعنا إثبات أنه إذا كانت A قابلة للانعكاس فإن النظام $A\,X = 0$ له الحل الصفري فقط نكون أثبتنا المطلوب .

نفرض A قابلة للانعكاس أي لها معكوس A^{-1}

$$A\,X = 0$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}.\,0$$

باستخدام الخاصية التجميعية

$$(A^{-1}A)\,X = 0$$

باستخدام خاصية المعكوس

$$I.X = 0$$

$$X = 0$$

إذن النظام $A\,X = 0$ له الحل الصفري فقط .

وبالمثل يمكن إثبات العكس .

٢٢ - $z = -2$, $y = \frac{-2}{3}$, $x = \frac{1}{2}$, $u = -\frac{1}{4}$

٢٣ - عدد لا نهائي من الحلول وتكون صورة الحل العام هي $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$

٢٤ - بفرض A , B مصفوفات متماثلة أي أن

$$A^T = A \quad , \quad B^T = B$$

والمطلوب إثبات أن $(A+B)$ مصفوفة متماثلة أي أن

$$(A+B)^T = A+B$$

البرهان :

باستخدام نظرية (٢ - ٤) نجد أن $(A+B)^T = A^T + B^T$

من الفرض $= A + B$

إذن $(A+B)$ مصفوفة متماثلة .

تمـــاريـــن (٣)

١ -

(i) العدد الكلي للانعكاسات $0+1+2+1 = 4$

(ii) العدد الكلي للانعكاسات $3+1+2+1 = 7$

(iii) العددالكلي للانعكاسات $0+0+0+0 = 0$

(iv) العددالكلي للانعكاسات $1+1+2+1 = 5$

(v) العدد الكلي للانعكاسات $4+3+2+1 = 10$

(vi) العدد الكلي للانعكاسات $2+2+0+1 = 5$

٢ - (i) زوجيـة (ii) فرديـــة (iii) زوجيـة

(iv) فرديـــة (v) زوجيـة (vi) فرديـــة

٣ - (i) فرديـــة (ii) زوجيـة (iii) زوجيـة

(iv) زوجيـة (v) فرديـــة (vi) زوجيـة

٤ -

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

(ii) $|A| = 2$

(iii) $\left|\begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix} = (-24+0+0)-(0+0+0) = -24$

(iv) $|A| = 4$ (v) $|A| = 2$

٥ - $|A| = -4$

لأنه إذا بدلنا عمودين فإن قيمة المحدد لا تتغير ولكن تتغير إشارته

$|B| = 4$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \times -4 = -8$$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + 4c_1 & b_2 + 4c_2 & b_3 + 4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

بتجزئ المحدد إلى مجموع محددين

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= -4 + 0 = -4$$

المحدد الثاني يساوي صفراً لأن الصف الثاني مضاعف الصف الثالث .

طريقة أخرى :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+4c_1 & b_2+4c_2 & b_3+4c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \; R_2 \to -4R_3 + R_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -4$$

٦ - $|B| = 3 \quad , \quad |C| = 9 \quad , \quad |D| = -3$

٧ - (i) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$= -20 + 92 = 72$

(ii) -24 (iii) 29

(iv) 0 (v) -120 (vi) -30

٨ - (i) $|A| = -3 \quad , \quad |B| = 7$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 9 & -5 & 14 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$|AB| = -21 = |A|\,|B|$

(ii) $|AB| = |A|\,|B| = (-24)(-30) = 720$

٩ - $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ (i)

مصفوفة المرافقات هي $C = \begin{bmatrix} -11 & 29 & 1 \\ -4 & 7 & -2 \\ 2 & -10 & 1 \end{bmatrix}$

يتـرك للدارس (ii)

١٠ - $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ (i)

لإيجاد $adj\ A$ نوجد أولاً مصفوفة المرافقات

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 7 \\ -6 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

فتكون مصفوفة المرافقات المدورة هي $adj\ A$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -6 \\ 1 & -7 & -3 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad |A| = -7$$

$$A.adj\ A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = -7\ I_3 = |A|\ I_3 .$$

(ii) يتـرك للدارس

١١ -

(i) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

(ii) $$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(iii) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

نوجد أولاً مصفوفة المرافقات

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & 10 & 2 \\ 2 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

قيمة محدد هذه المصفوفة هو

$|A| = 4 x 3 + 2 x 2 + 2 x -1$

$|A| = 14$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & -8 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & -8 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(iv) $|A| = 0$

إذن المصفوفة A شاذة أي ليس لها معكوس .

(v) $$A^{-1} = \frac{1}{-40}\begin{bmatrix} -10 & 2 & -6 \\ 0 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

(vi) $$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{15}{14} & \frac{5}{28} & \frac{-9}{28} & \frac{-23}{14} \\ \frac{8}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{-9}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{-6}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$$

- ١٢

(i) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to -R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

بأخذ $(b-a)$ كعامل مشترك من الصف الثاني ،

$(c-a)$ كعامل مشترك من الصف الثالث

$$= (b-a)\ (c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ [(c+a)-(b+a)]$$

$$= (b-a)\ (c-a)\ (c-b).$$

(ii)

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b & c \\ 1 & b+c & a \\ 1 & a+c & b \end{vmatrix} C_2 \rightarrow C_3 + C_2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a+b+c & c \\ 1 & a+b+c & a \\ 1 & a+b+c & b \end{vmatrix}$$

بأخذ $(a+b+c)$ كعامل مشترك من العمود الأول

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0$$

وذلك لتشابه العمودين الأول والثاني

مع العلم بأنه توجد طرق أخرى يمكن اتباعها باستخدام الخواص وجميعها تؤدي إلى نفس الجواب .

(iii) يمكن إجراء نفس طريقة الحل المتبعة في (i) .

(iv)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad C_1 \to C_2 + C_3 + C_1$$

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix}$$

بأخذ $(a + b + c)$ كعامل مشترك من العمود الأول

$$= (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

وباتباع نفس طريقة الحل في تمرين (i) فإن مفكوك المحدد يساوي

$$3\,a\,b\,c - (a^3 + b^3 + c^3).$$

(v)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

بأخذ a كعامل مشترك من العمود الأول ، b كعامل مشترك من العمود الثاني ، c كعامل مشترك من العمود الثالث نحصل على

$$= a\,b\,c\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to -C_1 + C_2 \\ C_3 \to -C_1 + C_3 \end{matrix}$$

$$a\,b\,c\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

بأخذ $(b-a)$ كعامل مشترك من الصف الثاني ،
$(c-a)$ كعامل مشترك من الصف الثالث

$$= a\,b\,c\ (b-a)\ (c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= a\,b\,c\ (b-a)\,(c-a)\,[(c+a)-(b+a)]$$

$$= a\,b\,c\ (b-a)\,(c-a)\,(c-b).$$

١٣ - (i)

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$5a + 4 = 0 \qquad a = -\frac{4}{5}$

(ii) $a = \frac{17}{7}$ (iii) $a = -16$ (iv) $a = \frac{289}{107}$

١٧ - (i)

$$x - y = 7$$
$$3x + 2y = 4$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 18$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -17$$

$$x = \frac{18}{5}\ ,\ \ y = -\frac{17}{5}$$

(ii) $$x = \frac{17}{9}\ ,\quad y = \frac{1}{3}$$

(iii)
$$x - 5y + 3z = 3$$
$$x + y - z = 1$$
$$2x + y + z = 7$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 28$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 28$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = 2\ ,\quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = 1\ ,\quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = 2.$$

(iv) $$x = \frac{14}{13}\ ,\quad y = \frac{10}{13}\ ,\quad z = -\frac{7}{13}$$

(v) $$x = \frac{22}{5}\ ,\quad y = -\frac{26}{5}\ ,\quad z = \frac{12}{5}$$

(vi) $$x = \frac{26}{21}\ ,\quad y = \frac{25}{21}\ ,\quad z = \frac{5}{7}$$

تمــاريــن (٤)

١ -

(i)

$$Y.X = 5 \times 2 + 3 \times 3 + 2 \times -1 + 1 \times 0$$
$$= 17$$
$$X.Y = 2 \times 5 + 3 \times 3 + (-1) \times 2 + 0 \times 1$$
$$= 17$$
$$X + Y = (2+5,\ 3+3,\ (-1)+2,\ 0+1)$$
$$= (7, 6, 1, 1)$$

$$d(X,Y) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-3)^2 + (-1-2)^2 + (0-1)^2}$$
$$= \sqrt{19}$$
$$\|X\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2 + 0^2}$$
$$= \sqrt{14}$$
$$\|Y\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2}$$
$$= \sqrt{39}$$

(ii)

$$Y.X = X.Y = 2$$
$$X + Y = (5, 2, -3)$$
$$d(X,Y) = \sqrt{30}$$
$$\|X\| = \sqrt{20}$$
$$\|Y\| = \sqrt{14}$$

(iii) $Y \,.\, X = X \,.\, Y = -12$

$X+Y = (0, 3, 2, 2)$

$d(X,Y) = \sqrt{110}$

٢ -

(i) $X-Y = (1, 2, -3)-(0, 1, -2)$

$= (1, 1, -1)$

$2X = 2(1, 2, -3)$

$= (2, 4, -6)$

$3X-2Y = 3(1, 2, -3)-2(0, 1, -2)$

$= (3, 6, -9)-(0, 2, -4)$

$= (3, 4, -5)$

(ii) $X-Y = (5, -4, -4, 7)$

$2X = (8, -4, 2, 6)$

$3X-2Y = (14, -10, -7, 17)$

(iii) $X-Y = (-5, 4, -8, 2)$

$2X = (-6, 10, -6, 0)$

$3X-2Y = (-13, 13, -19, 4)$

٣ -

(iii) $x(1, 2) = -4(y, 3)$

$(x, 2x) = (-4y, -12)$

بمساواة المركبات المتناظرة

$x = -4y \quad , \quad 2x = -12$

$x = -6 \quad , \quad y = \frac{3}{2}$

(ii) $x=-2 \quad , \quad y=-4$ أو $x=0 \ , \ y=0$

(iii) $(x, x+y)=(y-2, 6)$

بمساواة المركبات المتناظرة

$$x=y-2 \quad , \quad x+y=6$$

$$x=2 \quad , \quad y=4$$

(iv) $x=-1 \quad , \quad y=\frac{-3}{2}$

٤ - (i) $x=-6 \ , \ y=1 \ , \ w=6$

(ii) $Z+Y=X$

$$(x,-4,y)+(-3,2,3)=(1,-2,3)$$

$$(x-3,-2,y+3)=(1,-2,3)$$

$$x-3=1 \ , \ y+3=3$$

$$x=4 \ , \ y=0$$

(iii) $Z=2X$

$$(x,-4,y)=2(1,-2,3)$$

$$=(2,-4,6)$$

بمساواة المركبات المتناظرة $x=2 \ , \ y=6$

٥ -

(i) $x = 7 \quad , \quad y = 4$

(ii) $Z + W = X$

$$(x, -3, -6, y) + (2, u, v, 4) = (4, -1, -2, 3)$$

$$(x + 2, -3 + u, -6 + v, y + 4) = (4, -1, -2, 3)$$

$$x + 2 = 4 \rightarrow x = 2$$

$$-3 + u = -1 \rightarrow u = 2$$

$$-6 + v = -2 \rightarrow v = 4$$

$$y + 4 = 3 \rightarrow y = -1$$

(iii) $x = 12 \quad , \quad y = 9$

٦ -

(i) $X = (0, -1, 2, 3)$

$$\| X \| = \sqrt{14}$$

(ii) $X = (1, 2, -3, -4)$

$$\| X \| = \sqrt{30}$$

(iii) $X = (2, 3, 4)$

$$\| X \| = \sqrt{4 + 9 + 16}$$

$$= \sqrt{29}$$

(iv) $X = (-1, -2, 0)$

$$\| X \| = \sqrt{5}$$

٧ –

(i) $X = (4, 2, -1, 5) \quad , \quad Y = (2, 3, -1, 4)$

$$d(X, Y) = \sqrt{6}$$

(ii) $X = (0, 0, 2) \quad , \quad Y = (-3, 0, 0)$

$$d(X, Y) = \sqrt{13}$$

(iii) $X = (1, -1, 2) \quad , \quad Y = (3, 0, 2)$

$$d(X, Y) = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-0)^2 + (2-2)^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

(iv) $X = (1, 0, 0, 2) \quad , \quad Y = (3, -1, 5, 2)$

$$d(X, Y) = \sqrt{30}$$

٨ –

$$X_2 . X_3 = (-2) \times (-2) + 3 \times (-1) + (-1) \times (-3) + (-1) \times 4$$

$$x_2 . x_3 = 0$$

إذن X_2 , X_3 متعامدان .

$$X_3 . X_6 = 0$$

إذن X_3 , X_6 متعامدان

$$X_1 . X_3 = 4 \times (-2) + 2 \times (-1) + 6 \times (-3) + (-8) \times 4$$

$$= -60$$

$$\| X_1 \| . \| X_3 \| = \sqrt{120} . \sqrt{30} = 60$$

$$\| X_1 \| . \| X_3 \| = | X_1 . X_3 |$$

إذن X_1 , X_3 متوازيان .

٩ - $X = (1, 2, 3, -1) \quad , \quad Y = (1, 0, -2, 3)$

$$X + Y = (2, 2, 1, 2)$$

$$\| X \| = \sqrt{15} \quad , \quad \| Y \| = \sqrt{14} \quad , \quad \| X + Y \| = \sqrt{13}$$

$$\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \|$$

١٠ -

(i) $E_X = (0, 0, 1, 0)$

(ii) $E_X = (0, 0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5})$

(iii) $E_X = \frac{X}{\| X \|} = \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}}$

$$= (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$$

(iv) $E_X = (\frac{-1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}})$

١١ - $X = (4 - 3i, 2i, 5, 6 - i) \quad , \quad Y = (3 - i, 3 - 6i, 2i, -4)$

(i) $\| X \| = \sqrt{X . X}$

$$= \sqrt{(4 - 3i)\,\overline{(4 - 3i)} + 2i\,\overline{(2i)} + 5 \times 5 + (6 - i)\,\overline{(6 - i)}}$$

$$= \sqrt{(4 - 3i)(4 + 3i) + 2i(-2i) + 25 + (6 - i)(6 + i)}$$

$$\| X \| = \sqrt{91}$$

$$\| Y \| = \sqrt{75}$$

(ii) $(3+i)\,X = (3+i)\,(4-3i\,, 2i, 5, 6-i)$

$= (15-5i, -2+6i, 15+5i, 19+3i)$

$(2-i)\,Y = (2-i)\,(3-i\,, 3-6\,i\,, 2i, -4)$

$= (5-5i\,, -15i\,, 2+4i\,, -8+4i)$

$(3+i)\,X - (2-i)\,Y = (10, -2+21\,i\,, 13+i\,, 27-i)$

(iii) $X + Y = (7-4i\,, 3-4i\,, 5+2i\,, 2-i)$

$X - Y = (1-2i\,, -3+8i\,, 5-2i\,, 10-i)$

(iv) $X - Y = (1-2i\,, -3+8i\,, 5-2i\,, 10-i)$

$\| X - Y \| = \sqrt{208}$

١٢ -

(i) $A = (a_1\,, a_2\,, \dots, a_n)$

$= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \dots (0, 0, \dots, a_n)$

$= a_1\,(1, 0, \dots, 0) + a_2\,(0, 1, \dots, 0) + \dots + a_n\,(0, 0, \dots, 1)$

$= a_1 \,.\, E_1 + a_2 \,.\, E_2 + \dots + a_n \,.\, E_n$

(ii) $A \,.\, E_1 = (a_1\,, a_2\,, \dots\,, a_n) \,.\, (1, 0, \dots, 0) = a_1 + 0 + \dots + 0 = a_1$

$A \,.\, E_2 = (a_1\,, a_2\,, \dots\,, a_n) \,.\, (0, 1, \dots, 0) = 0 + a_2 + \dots + 0 = a_2$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$A \,.\, E_n = (a_1\,, a_2\,, \dots\,, a_n) \,.\, (0, 0, \dots, 1) = 0 + 0 + \dots + a_n = a_n$

إذن $\quad 1 \le i \le n \qquad A \,.\, E_i = a_i$

تمــاريــن (٥)

١ - نفرض المتجهين $X, Y \in W$ حيث (i)

$$X = (a_1, b_1, 2) \quad , \quad Y = (a_2, b_2, 2) \; , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 \in \mathbb{R}$$

$$X + Y = (a_1, b_1, 2) + (a_2, b_2, 2)$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 4) \quad \notin \quad W$$

حيث إن المركبة الثالثة تساوي 4 وليست 2 إذن W لا يمثل فضاءاً جزئياً من $\mathbb{R}^3$.

نفرض المتجهين $X, Y \in W$ حيث (ii)

$$X = (a_1, b_1, c_1) \quad , \quad c_1 = a_1 + b_1 \quad ; \quad a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$Y = (a_2, b_2, c_2) \quad , \quad c_2 = a_2 + b_2 \quad ; \quad a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$X + Y = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$$

$$= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

حيث $c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$

$$X + Y \in W$$

$$\alpha X = \alpha (a_1, b_1, c_1) = (\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha c_1)$$

حيث $\alpha c_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1$

$$\alpha X \in W$$

إذن W فضاءاً جزئياً من $\mathbb{R}^3$

٣ - نفرض مصفوفتين $A, B \in W$ حيث (i)

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b_1 = a_1 + c_1 \;\; ; \;\; a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, b_2 = a_2 + c_2 \;\; ; \;\; a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $b_1 + b_2 = (a_1 + a_2) + (c_1 + c_2)$

إذن $A + B \in W$

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ \alpha d_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $\alpha b_1 = \alpha a_1 + \alpha c_1$

إذن W فضاءاً جزئياً من $\mathbb{R}^4$.

٤ -

(i) $(1, 1, 1) = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$

$$= \alpha_1 (4, 2, -3) + \alpha_2 (2, 1, -2) + \alpha_3 (-2, -1, 0)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على مجموعة المعادلات

$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 1$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1$$
$$-3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1$$

هذا النظام غير متوافق وبالتالي لا يمكن إيجاد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ومن ثم فإن $(1, 1, 1)$ لا يكون تركيباً خطياً مع $\{X_1, X_2, X_3\}$

(ii) $(4, 2, -6) = \alpha_1 (4, 2, -3) + \alpha_2 (2, 1, -2) + \alpha_3 (-2, -1, 0)$

$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 4$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 2$$
$$-3\alpha_1 - 2\alpha_2 = -6$$

بحل هذا النظام من المعادلات نحصل على $\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 3, \ \alpha_3 = 1$

إذن $(4, 2, -6)$ تركيب خطي مع مجموعة المتجهات $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$(4, 2, -6) = 0X_1 + 3X_2 + X_3 = 3X_2 + X_3$$

(iii) $(-2, -1, 1) = \alpha_1 (4, 2, -3) + \alpha_2 (2, 1, -2) + \alpha_3 (-2, -1, 0)$

$$4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = -2$$
$$2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -1$$
$$-3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 1$$

بحل هذا النظام من المعادلات نحصل على $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = -2, \ \alpha_3 = 1$

إذن $(-2, -1, 1)$ تركيب خطي مع مجموعة المتجهات $\{X_1, X_2, X_3\}$

$$(-2, -1, 1) = X_1 - 2X_2 + X_3$$

(iv) $(-1, 2, 3)$ لا يكون تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات $\{X_1, X_2, X_3\}$ حيث إن نظام المعادلات غير متوافق

٥ - (i) $(3, 6, 3, 0)$ تركيب خطي مع مجموعة المتجهات حيث

$$(3, 6, 3, 0) = 0\,X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$
$$(3, 6, 3, 0) = X_2 + X_3 + X_4$$

(ii) $(1, 0, 0, 0)$ لا يمثل تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات

(iii) $(3, 6, -2, 5)$ يمثل تركيباً خطياً مع مجموعة المتجهات حيث

$$(3, 6, -2, 5) = X_1 + X_2 + X_4$$

٦ - لدراسة ما إذا كانت المجموعة $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ تولد $\mathbb{R}^2$ نختار أي متجه في $\mathbb{R}^2$ وليكن $X = (a, b)$ فإذا كان تركيباً خطياً مع المجموعة فإن المجموعة تولد R^2 وإن لم يكن فإن المجموعة لا تولد $\mathbb{R}^2$.

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$
$$(a, b) = \alpha_1(1, 2) + \alpha_2(-1, 1)$$

وبمساواة المركبات المتناظرة نحصل على نظام المعادلات

$$\alpha_1 - \alpha_2 = a$$
$$2\,\alpha_1 + \alpha_2 = b$$

الحل هو $\alpha_2 = \frac{b - 2a}{3}$ ، $\alpha_1 = \frac{a + b}{3}$

إذن الحل يتحقق لأي قيم اختيارية لكل من a, b ، وبالتالي فإن المجموعة $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ تولد $\mathbb{R}^2$

(ii) المجموعة $\{(0, 0,), (1, 1), (-2, -2)\}$ لا تولد $\mathbb{R}^2$.

(iii) المجموعة $\{(1, 3), (2, -3), (0, 2)\}$ تولد $\mathbb{R}^2$.

(iv) المجموعة $\{(2, 4), (-1, 2)\}$ تولد $\mathbb{R}^2$

٧ - نفس الطريقة المتبعة في (٦)

٨ - نفس الطريقة المتبعة في (٦) .

٩ - $(1, -2, 5) = -6 X_1 + 3 X_2 + 2 X_3$

١٠ - $\alpha = -8$

١٢ - $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \end{array}\right]$$

$$\alpha_1 = a \quad , \quad \alpha_2 = b - 2a \quad , \quad \alpha_3 = \alpha + a - 2b$$

إذن الحل يتحقق لأي قيم اختيارية $a, b, c,$ ، وبالتالي فإن

المجموعة $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ تولد $\mathbb{R}^3$

١٣ - يترك كتمرين .

١٤ - لدراسة ما إذا كانت المصفوفتان A , B لهما نفس الفضاء العمودي فإننا نتعامل مع مدور كل من A , B ونجري العمليات الأولية على الصفوف

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R_1 \rightarrow -R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & -3 & 12 \\ 3 & -4 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to -2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -3R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} R_1 \to R_3 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} R_3 \to -2R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

من (2) ,(1) نجد أن المصفوفتان A, B لهما نفس الفضاء العمودي .

تمـــاريـــن (٦)

١ - (i) $\alpha_1 (1, -2, 1) + \alpha_2 (2, 1, -1) + \alpha_3 (7, -4, 1) = (0, 0, 0)$

بمقارنة الطرفين نحصل على نظام المعادلات المتجانسة

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0$$

$$-2\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to 2R_1 + R_2 \\ R_3 \to -R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{1}{5} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad R_3 \to 3R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نحصل على نظام المعادلات

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 7\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

وبما أن عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل فيوجد هناك عدد لا نهائي من الحلول (أي لا يوجد الحل الصفري) ، وأحد هذه الحلول هو

$$\alpha_1 = -3 \quad , \quad \alpha_2 = -2 \quad , \quad \alpha_3 = 1$$

$$-3X - 2Y + Z = 0$$

إذن مجموعة المتجهات الثلاثة مرتبطة خطياً .

(ii) المجموعة مستقلة خطياً

(i) ٢ - المجموعة مرتبطة خطياً حيث إن

$$-X_1 + X_2 + 2X_3 = 0$$

ويمكن أن نعبر أن X_1 تركيب خطي مع X_2, X_3

$$X_1 = X_2 + 2X_3$$

(ii) المجموعة مستقلة خطياً

(iii) $$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = (0, 0, 0)$$

وبالتعويض وبمساواة المركبات المتناظرة نحصل على مجموعة المعادلات .

$$\alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 6\alpha_4 = 0$$
$$3\alpha_2 + 3\alpha_3 + 6\alpha_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to \frac{1}{2} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{3} R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad R_3 \to -R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad R_2 \to -R_3 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad R_3 \to 2R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = -2 \quad , \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -1 \quad , \quad \alpha_4 = 1$$

إذن المجموعة مرتبطة خطياً

$$-2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$$

ويمكن أن نعبر عن X_4 كتركيب خطي مع X_1, X_2, X_3

$$X_4 = 2X_1 + X_2 + X_3.$$

المجموعة مستقلة خطياً . (iv)

٤ - المجموعة تكون أساساً للفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ (i)

$$X = \frac{3}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 - \frac{3}{2} X_3 .$$

المجموعة لا تمثل أساساً . (ii)

المجموعة لا تمثل أساساً . (iii)

٥ - المجموعة تمثل أساساً للفضاء $\mathbb{R}^4$ (i)

$$X = 4 X_1 - 3 X_2 - 2 X_3 + 2 X_4 .$$

وبالمثل (iii) , (ii) تتبع نفس الطريقة .

٦ - مجموعة المصفوفات غير مرتبطة (i)

مجموعة المصفوفات مرتبطة خطياً حيث (ii)

$$2A - B + C = 0$$

٨ - (i)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -7 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to - R_1 + R_2 \\ R_3 \to -2R_1 + R_3 \\ R_4 \to -3R_1 + R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 \to 3R_2 + R_3 \\ R_4 \to R_2 + R_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to \frac{1}{8} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_4 \to 2R_3 + R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بما أن عدد الصفوف غير الصفرية في الصورة الصفية المميزة يساوي 3 فإن رتبة المصفوفة تساوي 3 .

(ii) الرتبة تساوي 2 .

(iii) الرتبة تساوي 2 .

١٠- (i)

$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$$

نكون مصفوفة المعاملات ونجري العمليات الأولية على صفوف المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_1 \to \frac{1}{3} R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 5 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -5\,R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-8}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-8}{3} \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{-3}{8} \text{ x } R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \to -\frac{1}{3} R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

نظام المعادلات المناظر

$$x_1 \quad + \frac{1}{4} x_3 \quad = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{4} x_3 + x_4 = 0$$

بفرض $x_3 = s \quad , \quad x_4 = t$

$$x_1 = -\frac{1}{4} s \quad , \quad x_2 = -\frac{1}{4} s - t \quad , \quad x_3 = s \quad , \quad x_4 = t$$

وعلى ذلك فإن متجهات الحل يمكن أن تكتب على الصورة

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} s \\ \frac{-1}{4} s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} s \\ \frac{-1}{4} s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

$$= s \begin{bmatrix} \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك فإن المتجهين

$$v_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (0, -1, 0, 1)$$

تولدان فضاء الحل وحيث إنهما مستقلان خطياً فيكون $\{v_1, v_2\}$ أساساً ويكون فضاء الحل ذا بُعد يساوي 2 .

(ii)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -2R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -\frac{1}{3} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \to -R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

إذن لنظام المعادلات يوجد الحل الصفري $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

إذن لا يوجد أساسا وبالتالي فإن البُعد = صفر

(iii) أساس فضاء الحل هو $\{(3, 1, 0)\ ,\ (-1, 0, 1)\}$

والبُعد = 2 .

(iv) لا يوجد أساس وبالتالي فإن البُعد = صفر

(v) لا يوجد أساس والبُعد = صفر

(vi) لا يوجد أساس والبُعد = صفر

١١ - متجهات الصفوف هي

$$R_1 = (2, -1, 0, 1)\ ,\ R_2 = (3, 5, 7, -1)\ ,\ R_3 = (1, 4, 2, 7)$$

ومتجهات الأعمدة هي

$$C_1 = (2, 3, 1)\ ,\ C_2 = (-1, 5, 4)\ ,\ C_3 = (0, 7, 2)\ ,\ C_4 = (1, -1, 7)$$

١٢ - (i)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \ R_2 \to -2R_1 + R_2 \ \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبما أن متجهات الصفوف غير الصفرية في الصورة الصفية المميزة لمصفوفة ما تكون أساساً لفضاء صفوف المصفوفة

إذن أساس صفوف المصفوفة $\{(1, -3)\}$.

وللحصول على أساس الأعمدة

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \ C_2 \to 3C_1 + C_2 \ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن أساس أعمدة المصفوفة هو المتجه $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

إذن رتبة المصفوفة = 1 .

(ii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad R_2 \to -2R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_2 + R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \frac{1}{8} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_1 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إذن أساس صفوف المصفوفة $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$

للحصول على أساس الأعمدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to -2C_1 + C_2 \\ C_3 \to C_1 + C_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 \to \frac{1}{8} C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

أساس أعمدة المصفوفة $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

إذن رتبة المصفوفة = 2 .

(iii) أساس الصفوف هي المتجهات

$$(1, 0, 1, 2) \quad , \quad (0, 1, 1, 0) \quad , \quad (0, 0, 0, 1)$$

أساس الأعمدة هي المتجهات $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

إذن رتبة المصفوفة = 3

(iv) أساس الصفوف هي المتجهات

$$(1, 0, 5, 2, 0) \quad , \quad (0, 1, 0, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, -3, 0, 1)$$

وأساس الأعمدة هي المتجهات

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن رتبة المصفوفة = 3 .

١٤ - نفرض (i)

$$X_1 = (1, -1, 2) \quad , \quad X_2 = (0, 2, -1) \quad , \quad X_3 = (-1, 1, 1)$$

$$X_1 . X_2 = 0 - 2 - 2 = -4 \neq 0$$

إذن المجموعة ليست مجموعة متعامدة

(ii) المجموعة متعامدة لأن

$$X_1 . X_2 = 0 , X_1 . X_3 = 0, X_2 . X_3 = 0$$

١٥ - نفرض (i)

$$X_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}), X_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), X_3 = (0, 1, 0)$$

$$X_2 . X_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

إذن المجموعة ليست مجموعة متعامدة وبالتالي فإنها ليست مجموعة متعامدة مُعيَّرة بالرغم من أن طول كل من X_1 , X_2 , X_3 يساوي الوحدة .

(ii) هذه المجموعة مجموعة متعامدة ولكنها ليست مُعيَّرة لأن

$$X_1 . X_2 = 0, \quad X_1 . X_3 = 0 , \quad X_2 . X_3 = 0$$

ولكن طول $X_1 = 3$.

١٦ - لكي يكون X , Y متعامدان

$$X . Y = 0$$

$$(1, 1, -2) . (a , -1, 2) = 0$$

$$a - 1 - 4 = 0$$

$$a = 5$$

١٧ - لكي تكون المجموعة $\{X , Y\}$ متعامدة مُعيَّرة

حيث $\| X \| = 1$

فـإن $X . Y = 0$

$$\| Y \| = 1$$

$$X . Y = 0 \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} = 0$$

$$a - b = 0 \qquad (1)$$

$$\| Y \| = 1 \rightarrow \sqrt{a_2 + \frac{1}{2} + b^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

من $(1) , (2)$ نجد أن $a = b = \pm \frac{1}{2}$

لكي تكون المجموعة $\{X , Y\}$ متعامدة مُعيّرة .

١٩ - نفرض $Y_1 = X_1 = (1, -2, 0\ 1)$

نحسب كل من Y_2, Y_3

$$Y_2 = X_2 - \left(\frac{X_2 \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1$$

$$= (-1, 0, 0, -1) - \left(\frac{-2}{6}\right)(1, -2, 0, 1)$$

$$= \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, 0, \frac{-2}{3}\right)$$

نضربه في 3 للتخلص من الكسر ونستخدمه Y_2 أيضاً

إذن $Y_2 = (-2, -2, 0, -2)$

$$Y_3 = X_3 - \left(\frac{X_3 \cdot Y_1}{Y_1 \cdot Y_1}\right) Y_1 - \left(\frac{X_3 \cdot Y_2}{Y_2 \cdot Y_2}\right) Y_2$$

$$= (1, 1, 0, 0) - \left(\frac{-1}{6}\right)(1, -2, 0, 1) - \left(\frac{-4}{12}\right)(-2, -2, 0, -2)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$$

نضربه في 2 للتخلص من الكسر ونستخدمه Y_3 أيضاً .

إذن $Y_3 = (1, 0, 0, 1)$

$$T = \{(1, -2, 0, 1), (-2, -2, 0, -2), (1, 0, 0, 1)\}$$

مجموعة الأساس المتعامد ، وبمعايرة متجهات هذه المجموعة

$$N_1 = \frac{Y_1}{\|Y_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$N_2 = \frac{Y_2}{\|Y_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$N_3 = \frac{Y_3}{\|Y_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

وبالتالي تكون المجموعة

$$N = \{N_1 , N_2 , N_3\}$$

$$= \{(\frac{1}{\sqrt{6}} , \frac{-2}{\sqrt{6}} , 0 , \frac{1}{\sqrt{6}}) , (\frac{-1}{\sqrt{3}} , \frac{-1}{\sqrt{3}} , 0 , \frac{-1}{\sqrt{3}}) ,$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}} , 0 , 0 , \frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

أساس متعامد مُعيَّر لفضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$.

٢١ - لكي يكون المتجه $X = (2, 3)$ تركيباً خطياً مع N_1 , N_2

$$(2, 3) = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2$$

ونوجد α_1 , α_2 باستخدام القانون $1 \leq i \leq 2 \quad , \quad \alpha_i = X . N_i$

$$\alpha_1 = (2, 3) . (\frac{1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_2 = (2, 3) . (\frac{-1}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\alpha_2 = \frac{-2}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

أي أن

$$X = \frac{5}{\sqrt{2}} N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2$$

تمــاريــن (٧)

١ - $$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

لدراسة ما إذا كان L تحويلاً خطياً أم لا نفرض أي متجهين في الفضاء $\mathbb{R}^2$

هما
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \ , \quad Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X+Y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+x_2+1 \\ y_1+y_2 \\ x_1+x_2+y_1+y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X)+L(Y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+1 \\ y_1 \\ x_1+y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+1 \\ y_2 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+x_2+2 \\ y_1+y_2 \\ x_1+y_1+x_2+y_2 \end{bmatrix} \neq L(X+Y)$$

إذن L لا يمثل تحويلاً خطياً .

(ii)
$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y \\ x-z \end{bmatrix}$$

نفرض $Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ متجهين في $\mathbb{R}^3$

$$L(X+Y) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ y_1+y_2 \\ x_1+x_2-z_1-z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ y_1 \\ x_1-z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ y_2 \\ x_2-z_2 \end{bmatrix}$$

$$= L(X) + L(Y)$$

$$L(\alpha X) = L\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \alpha y_1 \\ \alpha y_1 \\ \alpha x_1 - \alpha z_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ y_1 \\ x_1-z_1 \end{bmatrix} = \alpha L(X)$$

إذن L يمثل تحويلاً خطياً .

L لا يمثل تحويلاً خطياً (iii)

L لا يمثل تحويلاً خطياً (iv)

L يمثل تحويلاً خطياً (v)

L يمثل تحويلاً خطياً (vi)

٢ -

(i) $$L\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}\right)=L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$=L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)-2L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+3L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$$

(ii) $$L\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right)=aL\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+bL\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+cL\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=a\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2a+3b+2c\\-4a-5b+3c\end{bmatrix}$$

٣ -

(i) $\begin{bmatrix}1\\-12\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}2a+b\\-3a+2b\end{bmatrix}$

٤ - $$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ x+y \\ y \end{bmatrix}$$

(أ) $ker\ L$ يتكون من جميع المتجهات $X \in \mathbb{R}^2$

بحيث إن $L(X) = 0$

إذن
$$\begin{bmatrix} x \\ x+y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبحل هذا النظام المتجانس نجد أنه لا يوجد غير الحل الصفري

إذن $X = 0 \ , \ Y = 0$ $\qquad ker\ L = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

(ب) لدراسة ما إذا كان L متبايناً أم لا؟

نفرض المتجهين $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \ , \ Y = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

نفرض أن $L(X) = L(Y)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+y_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2+y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

بمقارنة الطرفين $x_1 = x_2 \ , \ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \ , \ y_1 = y_2$

بحل المعادلات نحصل على $x_1 = x_2 \ , \ y_1 = y_2$

$$X = Y$$

إذن L متباين لأنه إذا كان $L(X) = L(Y)$ فإن $X = Y$

طريقة أخرى :

بما أن $\ker L = \{0\}$ إذن L متباين .

(حـ)
$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

لدراسة ما إذا كان L شاملاً نفرض أي متجه $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

ونبحث هل يمكن إيجاد متجه $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ بحيث إن $L(X) = Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

باختزال الصفوف للمصفوفة الموسعة نحصل على

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 - y_1 \\ 0 & 0 & y_3 - y_2 + y_1 \end{array}\right]$$

الحل يتحقق فقط في حالة أن تحقق المعادلة $y_3 - y_2 + y_1 = 0$

ولهذا فإن L ليس شاملاً .

٥ - (أ) L ليس متبايناً

(ب) لإيجاد أساس $ran\ L$ نلاحظ أن

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x+2y+2z \\ 2x+3y-\ z \\ -x+\ y-2z \end{bmatrix}$$

$$= x\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

حيث

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن $\{Y_1, Y_2, Y_3\}$ تولد مدى التحويل $ran\ L$

ولكن $\{Y_2, Y_3\}$ مستقلان خطياً حيث $Y_1 = Y_2 + Y_3$

وبالتالي فإن Y_2, Y_3 تكون أساس $ran\ L$.

إذن $dim\ (ran\ L) = 2$.

٦ - (أ) L شاملاً .

(ب) بُعد $ker\ L$ يساوي 1

٧ - لإيجاد إحداثيات المتجه $X = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$ بالنسبة لمتجهات الأساس X_1, X_2

نفرض الإحداثيات α_1, α_2

إذن $$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \qquad (i)$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = -3$$
$$-\alpha_1 + 3\,\alpha_2 = -7$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -7 \end{array}\right] R_2 \to R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

نظام المعادلات المناظر

$$\alpha_1 + 2\,\alpha_2 = -\ 3$$
$$5\,\alpha_2 = -\,10$$

إذن $\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = -2 \quad \leftarrow \quad [X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(ii) $[X]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (iii) $[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

(iv) $[X]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

٨ - (i) $[X]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ii) $[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iii) $[X]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (iv) $[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

٩ - (i) $[X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ii) $[X]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(iii) $[X]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (iv) $[X]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

١٠ - $\{E_1 = (1, 0) \;,\; E_2\,(0,1)\}$, $\{F_1 = (1, 3) \;,\; F_2 = (2, 5)\}$

(أ) نفرض مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{E_i\}$ إلى القاعدة $\{F_i\}$

هي
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

حيث
$$F_i = A E_i$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} E_1 + a_{12} E_2 \\ a_{21} E_1 + a_{22} E_2 \end{bmatrix}$$

إذن
$$F_1 = a_{11} E_1 + a_{12} E_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{12} = 3$$

$$F_2 = a_{21} E_1 + a_{22} E_2$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = 2 \quad , \quad a_{22} = 5$$

إذن
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{E_i\}$ إلى القاعدة $\{F_i\}$

(ب) لإيجاد مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{F_i\}$ إلى القاعدة $\{E_i\}$

نفرض المعادلة $E_i = A F_i$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\ F_1 + a_{12}\ F_2 \\ a_{21}\ F_1 + a_{22}\ F_2 \end{bmatrix}$$

إذن $E_1 = a_{11}\ F_1 + a_{12}\ F_2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -5 \quad , \quad a_{12} = 3$$

$$E_2 = a_{21}\ F_1 + a_{22}\ F_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} = 2 \quad , \quad a_{22} = -1$$

إذن $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{F_i\}$ إلى القاعدة $\{E_i\}$

١١ -

(أ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{E_i\}$ إلى القاعدة $\{F_i\}$

(ب)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة الانتقال من القاعدة $\{F_i\}$ إلى القاعدة $\{E_i\}$

١٢ -

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \ X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ Y_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} , \ Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(أ)

$$L(X_1) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(X_2) = L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بالنسبة إلى الأساس S هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

(ب)

$$L(X_1) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 \qquad = 2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha_1 = 1 \quad ; \quad \alpha_2 = 1$$

$$L(X_1) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(X_2) = L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 = \frac{-1}{2} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}$$

$$[L(X_2)]_T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

(حـ)

$$L(Y_1) = L\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 3 \quad , \quad \alpha_2 = -4$$

$$[L(Y_1)]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$L(Y_2) = L\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 4$$

$$[L(Y_2)]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

(د)

$$L(Y_1) = L\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 \qquad = -4 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha_1 = -2 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$[L(Y_1)]_T = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L(Y_2) = L\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 2 \\ 2\alpha_1 \qquad &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha_1 = 2 \quad , \quad \alpha_2 = 2$$

$$[L(Y_2)]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بالنسبة إلى T هي

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

(هـ) **أولاً** : قيمة $L\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ من التعريف مباشرة هي

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 + 4 \\ 2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ثانياً : باستخدام المصفوفة (1)

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

ثالثاً : باستخدام المصفوفة (2)

$$[L(X)]_T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} [X]_S \qquad (7)$$

للحصول على $[X]_S$ حيث $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ نفرض النظام

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 2$$

$$[X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بالتعويض في (7)

$$[L(X)]_T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$L(X) = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

رابعاً : باستخدام المصفوفة (3)

$$[L(Y)]_S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} [Y]_T \qquad (9)$$

للحصول على $[Y]_T$ حيث $Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ نفرض النظام

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 1 \quad , \quad \alpha_2 = 1$$

$$[Y]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بالتعويض في (9)

$$[L(Y)]_S = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$L(Y) = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (10)$$

خامساً : باستخدام المصفوفة (4)

$$[L(Y)]_T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} [Y]_T \qquad (11)$$

من البند السابق $[Y]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ بالتعويض في (11)

$$[L(Y)]_T = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$L(Y) = \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 = 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من (5) , (6) , (8) , (10) , (12) نجد أن $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

١٣ -

(أ) مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) مصفوفة L بالنسبة إلى T , S هي

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

(حـ) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

١٤ -

(أ) مصفوفة L بالنسبة إلى S هي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ب) مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(حـ) مصفوفة L بالنسبة إلى T , S هي $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(د) مصفوفة L بالنسبة إلى T هي $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(هـ) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

-١٥

(أ) مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(ب) مصفوفة L بالنسبة إلى S` , T` هي $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

(حـ) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

- ١٦

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + 2y - 4z \\ x - 5y + 3z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$S = \left\{ F_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ G_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$L(F_1) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha_1 = -7 \quad , \quad \alpha_2 = 4$$

$$[L(F_1)]_T = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L(F_2) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 5 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 &= -4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha_1 = -33 \quad , \quad \alpha_2 = 19$$

$$[L(F_2)]_T = \begin{bmatrix} -33 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$L(F_3) = L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \alpha_1 = -13 \quad , \quad \alpha_2 = 8$$

$$[L(F_3)]_T = \begin{bmatrix} -13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

إذن مصفوفة L بدلالة الأساسين S , T هي

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}$$

(١٧) مصفوفة L بالنسبة إلى S , T هي

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

تمـــاريـــن (٨)

١ -

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{(i)}$$

المصفوفة المميزة هي $A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

المعادلة المميزة هي $| A - \lambda I_2 | = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 3$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$ نكون النظام المتجانس

$$(A - \lambda_1 I_2) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر قيمة $\lambda_1 = -1$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$ نكون النظام المتجانس

$$(A - \lambda_2 I_2) X = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$.

(ii) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 4$ مكرر والمتجه الذاتي $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 + 3 = 0$

لا توجد قيم ذاتية حقيقية

(iv) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 - 2\lambda = 0$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = 2$

والمتجهات الذاتية المناظرة هي $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(v) المعادلة المميزة هي $\lambda^2 - 5\lambda + 7 = 0$

لا توجد قيم ذاتية

(vi)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المميزة هي

$$A - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

المعادلة المميز هي $|A - \lambda I_3| = 0$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 4$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} -r \\ \frac{-3}{2} r \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 4$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} 4r \\ \frac{5}{2}r \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 4$.

(vii) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = 0$

$$(2 - \lambda)(-1 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = -1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

والمتجهات الذاتية المناظر هي $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(viii) المعـادلة المـميزة هي $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

والمتجهات الذاتية المناظرة هي $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ix) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$

القيم الذاتية $\lambda = 2$ مكرر

المتجه الذاتي المناظر $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(x) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = -2$ مكرر , $\lambda_2 = 4$

(xi) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 3$ مكرر , $\lambda_2 = -4$

المتجهات الذاتية المناظرة $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(xii) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

القيمة الذاتية هي $\lambda_1 = 2$

المتجه الذاتي المناظر $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(xiii) المعادلة المميزة هي $\lambda^3 = 0$

القيم الذاتية $\lambda = 0$ مكرر

المتجه الذاتي المناظر هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

٢ - $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (i)

المعادلة المميزة هي $|A - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 1$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} \frac{-r}{2} \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(iii) الجذور المميزة هي $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

القيم الذاتية $\lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_1 = 1$ مكرر وغير قابلة للتحويل .

(iv)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة $|A - \lambda I_3| = \lambda^3 - 4\lambda^2 - \lambda + 4 = 0$

الجذور المميزة $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad , \quad \lambda_3 = 4$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -1 \quad , \quad \lambda_3 = 4$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} r \\ \frac{-3}{2} r \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = -1$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r ولذلك فإن $P_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = -1$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 4$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r وعليه فإن $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 4$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{-30} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \\ -12 & -14 & -18 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{-30}\begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(v)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية هي $\lambda_2 = 3$ ، $\lambda_1 = 1$ مكرر

للحصول على المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة $\lambda_1 = 1$

نفرض النظام المتجانس
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} t \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عددين حقيقيين r, t .

وعلى ذلك فإن المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة $\lambda_1 = 1$ هي المتجهات غير الصفرية التي على الصورة

$$\begin{bmatrix} t \\ -2r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$$

$$= t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وحيث إن $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ غير مرتبطين خطياً فإنهما المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة $\lambda_1 = 1$.

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$ نفرض النظام المتجانس

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نجد أن $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ حل لأي عدد حقيقي r وعليه فإن $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

هو المتجه الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} , \quad P^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(vi)

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(vii) غير قابلة للتحويل لأن الجذور المميزة للمعادلة المميزة

$$\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0$$

هي $\lambda_1 = i \quad , \quad \lambda_2 = -i \quad , \quad \lambda_3 = -8$

(vi) من تمـرين (1) رقم (viii) نجـد أن

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(ix) من تمرين (1) رقم (ix) نجد أنها غير قابلة للتحويل .

(x) من تمرين (1) رقم (xi) نجد أنها غير قابلة للتحويل .

(xi) $P=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(xii) من تمـرين (1) رقم (vi)

$P=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{-30}\begin{bmatrix} 16 & -20 & -14 \\ -10 & 20 & -10 \\ -12 & 0 & -12 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

(xiii) $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1}=\frac{1}{-6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -6 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

٣ - أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$ (i)

هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 3$

هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda = 4$ (ii)

هو $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

لا توجد فضاءات ذاتية (iii)

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 0$ (iv)

هو $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$

هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

لا توجد فضاءات ذاتية (v)

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$ (vi)

هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$

هو $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 4$

هو $\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(vii) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = -1$

هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$

هو $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 3$

هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(viii) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 1$

هو $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = 2$

هو $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_3 = 3$

هو $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ix) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda = 2$

هو $\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(xi) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_1 = 3$

هو $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda_2 = -4$

هو $\begin{bmatrix} -2 \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(xii) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda = 2$

هو $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

(xiii) أساس الفضاء الذاتي المناظر لقيمة $\lambda = 0$

هو $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

٤ - يتبع مثل ما أتبع في تمرين (٣)

تمـــاريـــن (٩)

١ - بالتعويض في الصـورة $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (i)

إذن معادلة المستقيم هي

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -7x + 5y + 1 = 0$$

٢ - بكتابة المعادلة في الصورة المتماثلة

(i) $$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-3}$$

بالتعويض بإحداثيات النقطة $(1, -1, 0)$ نجدها لا تحقق المعادلة وبالتالي لا تقع على المستقيم .

٣ - بالتعويض في المعادلات (i)

$$x = x_0 + ta \quad , \quad y = y_0 + tb \quad , \quad z = z_0 + tc$$

نحصل على المعادلات البارامترية في الصورة

$$x = 3 + 4t \quad , \quad y = 4 - 5t \quad , \quad z = -2 + 2t$$

٤ - نوجد المتجه S الواصل بين النقطتين $P_0(2,-3,1)$, $P_1(4,2,5)$ (i)

إذن $S = (2, 5, 4)$

وبالتعويض في المعادلات البارامترية للمستقيم نحصل على

$$x = 2 + 2t$$
$$y = -3 + 5t$$
$$z = 1 + 4t$$

بحذف t نحصل على الصورة المتماثلة الآتية

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{4}$$

٥ - بالتعويض في معادلة المستوى بدلالة نقطه والعمودي عليه (i)

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

نحصل على $3(x-0) - 2(y-2) + 4(z+3) = 0$

أي أن $3x - 2y + 4z + 16 = 0$

٦ - بالتعويض في المعادلة التالية عن إحداثيات النقط الثلاث (ii)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

نحصل على المعادلة $x + 10y - 7z = 0$

٧ - بحل المعادلتين معاً نحصل على

$$z = t$$
$$x = \frac{8}{13} + \frac{23}{13}t$$
$$y = \frac{-27}{13} + \frac{2}{13}t$$

٨ - الصورة المتماثلة للمستقيم هي

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-4}$$

فيكون المستقيم هو تقاطع المستوين

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{1} \text{ ، } \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-4}$$

أي هو تقاطع المستويين $x+3y \quad -11=0$

$$4y + z - 14 = 0$$

٩ - المعادلات البارامترية

$$x = -1 - 9t$$
$$y = 5 + 6t \qquad (1)$$
$$z = -5 - 12t$$

تعني أن هذا المستقيم يمر بالنقطة $P_1(-1, 5, -5)$

ويوازي المستقيم $S_1 = (-9, 6, -12)$

أما المعادلات البارمترية

$$x = 2 + 3t$$
$$y = 3 - 2t \qquad (2)$$
$$z = -1 + 4t$$

فتمثل مستقيم يمر بالنقطة $P_2(2, 3, -1)$ ويوازي المستقيم $S_2 = (3, -2, 4)$

ولكن S_1 يوازي S_2 وأيضاً P_1 تحقق (2) ، P_2 تحقق (1)

إذن المعادلات البارامترية تمثل نفس المستقيم .

١٠ - لإيجاد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة $P_0(3, -1, -3)$

وعمودي على المستقيم الواصل بين $P_1(0, 3, 5)$, $P_2(3, -2, 4)$

نوجد المعادلات البارامترية للمستقيم $\overrightarrow{P_1 P_2}$ على الصور

$$x = 3t$$

$$y = 3 - 5t$$

$$z = 5 - t$$

وهي تمثل إحداثيات أي نقطة Q على المستقيم $\overrightarrow{P_1 P_2}$

إذن معادلة المستقيم $\overrightarrow{P_0 Q}$ هي : $(3 - 3t, -4 + 5t, -8 + t)$

لكن $\overrightarrow{P_0 Q}$ عمودياً على $\overrightarrow{P_1 P_2}$ ، وحيث إن

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (3, -5, -1)$$

إذن $3(3 - 3t) - 5(-4 + 5t) - (-8 + t) = 0$

ومنها $t = \frac{37}{35}$

إذن إحداثيات Q هي $\left(\frac{111}{35} , \frac{-16}{7} , \frac{138}{35} \right)$

إذن المعادلات البارامترية للمستقيم $\overrightarrow{P_0 Q}$ هي

$$x = 3 + \frac{6}{35} t$$

$$y = -1 - \frac{9}{7} t$$

$$z = -3 + \frac{243}{35} t .$$

١١ - بالتعويض في المعادلة $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

إذن المعـادلة المطلوبة $4(x+2)-4(y-3)+(z-4)=0$

١٢ - المتجه العمودي هو $N=(-2,4,-5)$

وبالتعويض في معادلة المستوى بدلالة نقطة والعمودي

نحصل على $-2(x-2)+4(y-4)-5(z+3)=0$

١٣ - العمودي على المستوى هو $N=(2,-3,4)$

ويكون موازياً للمستقيم المطلوب

إذن المعادلات البارامترية

$$x=-2+2t$$
$$y=5-3t$$
$$z=-3+4t$$

١٤ - المستوى $3x-2y+z=0$ يمر بنقطة الأصل

إذا كانت $P(2,3,-1)$ فإن طول العمودي على المستوى هو مسقط المتجه $\overrightarrow{OP}$ في الاتجاه العمودي على المستوى

$$|h| = |\overrightarrow{OP}\,.\,\hat{n}|$$

$$= \left|(2,3,-1)\,.\,\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}$$

١٥ - الصيغة التربيعية (i)

$$X^T AX= [\,x \quad y\,] \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

١٦ - (ii)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = -2 \ , \ \lambda_2 = 5 \ , \ \lambda_3 = -5$

بتطبيق نظرية المحاور الرئيسية فإن الصيغة المكافئة هي

$$H(X`) = -2\,x`_1{}^2 + 5\,x`_2{}^2 - 5\,x`_3{}^2$$

١٧ - لاختبار تكافؤ الصيغ التربيعية نحاول كتابتها في الصورة القياسية حيث نقارن بينها ، وفي هذه المسألة لا توجد صيغتان متكافئتان

١٨ - (i)

$$x^2 + 9\,y^2 - 9 = 0$$

بكتابة هذه المعادلة في الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$$

وهي تمثل قطع ناقص مركزه نقطة الأصل

حيث $a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 1$

(i) ١٩ - بإكمال المربع للمعادلة $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

نحصل على $(x-2)^2 = -4y$

لإجراء الانتقال نضع $x` = x - 2$

$y` = y$

إذن $x`^2 = -4y`$

وهي تمثل قطع مكافئ محوره المستقيم $x = 2$ ومفتوح لأسفل

(iii) ٢٠ - $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية هي $\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 10$

بتطبيق نظرية المحاور الرئيسية تتحول الصيغة السابقة للصورة القياسية

$$H(X`) = 5x`^2 + 10y`^2 = 5$$

لإيجاد مصفوفة الدوران :

المتجهات الذاتية المناظرة هي

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |P| = 1$$

زاوية الدوران هي $\theta = \tan^{-1}(-2)$

٢١ -
$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(i)}$$

القيم الذاتية هي $\lambda_2 = 10 \quad , \quad \lambda_1 = 0$

المتجهات الذاتية المناظرة هي

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T A P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

بوضع

$$X = P X` = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} x` + 3y` \\ -3x` + y` \end{bmatrix}$$

بالتعويض في الصورة $X`^T (P^T AP) X` + BPX` + f = 0$

$$[x` \quad y`] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x` \\ y` \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{10}} [-10\sqrt{10} \quad 10\sqrt{10}] \begin{bmatrix} x` + 3y` \\ -3x` + y` \end{bmatrix} + 90 = 0$$

$$10y`^2 + 10(-4x` - 2y`) + 90 = 0$$

$$y`^2 - 4x` - 2y` + 9 = 0$$

بإكمال المربع $(y` - 1)^2 = 4(x` - 2)$

بوضع $x`` = x` - 2 , \quad y`` = y` - 1$

نحصل على $y``^2 = 4x``$

تمثل قطع متكافئ .

(ii) ٢٢ - من المصفوفة المصاحبة A للصيغة التربيعية

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم الذاتية لهذه المصفوفة

$$|A - \lambda I_3| = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

إذن القيم الذاتية لهذه المصفوفة

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = 2$$

$$In(A) = (3, 0, 0)$$

إذن المعادلة تمثل سطح ناقص

(i) ٢٣ -

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية $\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

باستخدام نظرية المحاور الرئيسية $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$

الصورة القياسية للسطح تمثل مخروط .

تمارين عامة

تمارين عامة

١ - بفرض الأنظمة التالية :

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} 3x - y + 2z &= 4 \\ 2x + y \qquad &= 2 \\ y + 3z &= 7 \\ 4x \qquad - z &= 4. \end{aligned}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{aligned} 2x \qquad\qquad + w &= 7 \\ 3x + 2y + 3z \qquad &= -2 \\ 2x + 3y - 4z \qquad &= 3 \\ x + \qquad 3z \qquad &= 5. \end{aligned}$$

(أ) أوجد مصفوفة المعاملات .

(ب) اكتب النظام الخطي في صورة مصفوفية

(جـ) أوجد المصفوفة الموسعة .

٢ - اكتب كل من

$$\text{(i)}\quad x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)}\quad x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad x\,[1 \quad 2 \quad 1] + y\,[3 \quad 0 \quad -1] = [3 \quad 1 \quad 4].$$

$$\text{(iv)}\quad x\,[2 \quad 1 \quad 0 \quad 1] + y\,[3 \quad -1 \quad 2 \quad 2] + z\,[0 \quad 1 \quad -1 \quad 3] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

كنظام خطي في الصورة المصفوفية .

٣ - بفرض المصفوفتين

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حقق أن $AB = 3\,A_1 + 5\,A_2 + 2\,A_3$

حيث A_j يكون العمود j في المصفوفة A ، $1 \le j \le 3$

٤ - بفرض المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد كلاً من :

(i) $A^2 - 2A$.

(ii) $3A^3 - 2A^2 + 5A - 4I_2$.

٥ - بفرض المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ أوجد كلاً من :

(i) $A^2 + 3A$,

(ii) $2A^3 + 3A^2 + 4A + 5I_2$.

٦ - بفرض المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التي تحصل عليها في كل عملية من العمليات الصفية البسيطة التالية :

(أ) ضرب الصف الرابع بالعدد -5 .

(ب) إبدال الصفين الأول والثالث .

(جـ) إضافة الصف الأول بعد ضربه في (3-) إلى الصف الثاني .

٧ - بفرض المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفات التي تحصل عليها في كل عملية من العمليات الصفية البسيطة التالية :

(أ) إبدال الصفين الأول والثالث .

(ب) إضافة ثلاثة أمثال الصف الثاني إلى الصف الثالث .

(جـ) ضرب الصف الثاني في $\frac{1}{2}$.

٨ - ادرس إمكانية وجود حل لكل من الأنظمة التالية باستخدام طريقة الحذف المتتالي :

(i)
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ x - 2y + z &= -5 \\ 3x + y + z &= 3. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 6 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x + y + 2w &= 6. \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x + y + 3z + 2w &= 7 \\ 2x - y + 4w &= 8 \\ 3y + 6z &= 8. \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ x - y + z &= 7 \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x + 3y - 2z &= 7 \\ 5x + 2y - 6z &= 7. \end{aligned}$$

(vi)
$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3. \end{aligned}$$

(vii) $\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1. \end{aligned}$

(viiii) $\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - 3y + z &= 4 \\ -5x \quad - 2z &= -5. \end{aligned}$

٩ - بفرض المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

أوجد الحل غير الصفري لنظام المعادلات المتجانسة

$$(2\,I_3 - A)\,X = 0$$

١٠ - أوجد كل من $A, B, (AB)^{-1}$ إذا كانت

(i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

١١ - أوجد قيم a التي تجعل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$

قابلة للانعكاس . ثم أوجد A^{-1} .

١٢ - إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ أوجد كلاً من $A^{-1}, (A^T)^{-1}$.

١٣ - حل النظام الخطي $AX = B$ إذا كان

(i) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ii) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

١٤ - أوجد قيم a التي تجعل كل من الأنظمة التالية

(i)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a^2 \\ x + y + 3z &= a \\ 3x + 4y + 7z &= 8. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= a^2 \\ x + y + 3z &= a \\ 3x + 4y + 8z &= 8. \end{aligned}$$

لها حلول .

١٥ - ما هي قيم a التي تجعل النظام المتجانس التالي له حلول غير الحل الصفري

$$\begin{aligned} (1-a)x \quad + z &= 0 \\ -ay + z &= 0 \\ y - az &= 0. \end{aligned}$$

١٦ - أوجد قيم λ التي تجعل

(i) $\begin{vmatrix} \lambda-4 & 2 \\ 3 & \lambda-1 \end{vmatrix} \neq 0$, (ii) $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0$

١٧ - أوجد قيم λ التي تجعل $|A - \lambda I_3| = 0$ إذا كانت

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

١٨ - باستخدام قاعدة كرامر أوجد قيم a التي تجعل النظام الخطي

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 9 \\ 2x + y &= a \\ 3x - y - z &= -10 \end{aligned}$$

له حل عندما $y = 1$

١٩ - أوجد قيمة a التي تحقق العلاقة

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 1 & 3a & 0 \\ -2 & a & 2 \end{vmatrix} = 14$$

٢٠ - أوجد جميع قيم a التي تحقق العلاقة $X . Y = 0$ لكل من :

(i) $X = (1, a)$, $Y = (-1, a)$

(ii) $X = (2, a, 1)$, $Y = (2, a, 1)$

(iii) $X = (a, 2, 1, a)$, $Y = (a, -1, -2, -3)$

٢١ - أوجد متجه الوحدة لكل من المتجهات التالية :

(i) $X = (1, 2, -1)$

(ii) $X = (3, 1)$

(iii) $X = (1, 0, 0)$

(iv) $X = (-1, 3, 0, 6)$

٢٢ - أي من المجموعات الجزئية التالية من $\mathbb{R}^4$ تكون فضاءً جزئياً؟

(i) $W = \{ (a, b, c, d) \mid a - b = 2 \; ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(ii) $W = \{ (a, b, c, d) \mid a = b = 0 \; ; \; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

(iii) $W = \{ (a, b, c, d) \mid a > 0, b < 0 \; ; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$

٢٣ - بفرض المتجهين $X, Y \in \mathbb{R}^4$ حيث

$$X = (2, 0, 3, -4) \ , \ Y = (4, 2, -5, 1)$$

أثبت أن المجموعة الجزئية W من $\mathbb{R}^4$ حيث

$$W = \{ aX + bY \mid a, b, \in \mathbb{R} \}$$

تكون فضاءاً جزئياً من $\mathbb{R}^4$.

٢٤ - أي من المجموعات الجزئية التالية من الفضاء المتجه M_{nn} تكون فضاءاً جزئياً

(أ) مجموعة المصفوفات المتماثلة من النوع $n \times n$.

(ب) مجموعة المصفوفات القطرية من النوع $n \times n$.

(جـ) مجموعة المصفوفات من النوع $n \times n$ ومحددها يساوي 1 .

(د) مجموعة المصفوفات المثلثية العليا من النوع $n \times n$.

٢٥ - أوجد قيم a التي تجعل المجموعة $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ تمثل أساساً للفضاء $\mathbb{R}^3$

٢٦ - أوجد أساس الفضاء الجزئي W من M_{33} والذي يتكون من المصفوفات المتماثلة

٢٧ - أوجد أساس الفضاء الجزئي W من M_{33} والذي يتكون من المصفوفات القطرية .

٢٨ - هل المجموعة $S = \{ (2, 2, 3), (1, 0, 2), (0, 1, 3)\}$ مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$ ؟

٢٠ - هل المجموعة $S = \{(4, 1, 2), (2, 5, -5), (2, -1, 3)\}$
مستقلة خطياً في $\mathbb{R}^3$ ؟

٣٠ - إذا كان S أساس الفضاء المتجه V أوجد إحداثيات المتجه X بالنسبة للأساس S إذا كان :

(i) $V = \mathbb{R}^3,\ S = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\},\ X = (2, -1, -4).$

(ii) $V = \mathbb{R}^2,\ S = \{(1, 0), (0, 1)\}, X = (3, -2)$

(iii) $V = M_{22}, S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iv) $V = M_{22}, S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

٣١ - إذا كان S أساس الفضاء المتجه V أوجد المتجه X إذا كان :

(i) $V = \mathbb{R}^2, S = \{(2, 1, (-1, 1)\}, [X]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(ii) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}; [X]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(iii) $V = M_{22}, S = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right\}$

$$[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

٣٢ - إذا كان $S = \{(1, -1), (2, 1)\}, T = \{(3, 0), (4, -1)\}$

أساسان للفضاء $\mathbb{R}^2$

فإذا كان $X \in \mathbb{R}^2$, $[X]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ أوجد $[X]_S$

٣٣ - إذا كان $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)\}$

$T = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

أساسان للفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$.

فإذا كان $X \in \mathbb{R}^3$, $[X]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ أوجد $[X]_T$

٣٤ - إذا كان $S = \{X_1, X_2\}$, $T = \{Y_1, Y_2\}$

أساسان للفضاء المتجه $\mathbb{R}^2$ حيث $X_1 = (1, 2)$, $X_2 = (0, 1)$

وكانت مصفوفة الانتقال من S إلى T هي $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد T .

٣٥ - إذا كان $S = \{X_1, X_2, X_3\}$, $T = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

أساسان للفضاء المتجه $\mathbb{R}^3$ حيث

$X_1 = (1, 0, 1)$, $X_2 = (1, 1, 0)$, $X_3 = (0, 0, 1)$

وكانت مصفوفة الانتقال من T إلى S هي $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

أوجد T .

٣٦ - أي من المجموعات التالية تكون مجموعة متجهات متعامدة مُعيَّرة؟

(i) $\{ (0, 1, 0, -1) , (1, 0, 1, 1) , (-1, 1, -1, 2) \}$

(ii) $\{ (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) , (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}) , (\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}) \}$

٣٧ - استخدم عملية جرام - شميت لإيجاد أساس متعامد مُعيَّر لفضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ أساسه $\{ (1, -1, 0) , (2, 0, 1) \}$

٣٨ - استخدم عملية جرام - شميت لإيجاد أساس متعامد مُعيَّر لفضاء جزئي من $\mathbb{R}^4$ أساسه $\{ (1, 1, -1, 0) , (0, 2, 0, 1) , (-1, 0, 0, 1) \}$

٣٩ - استخدم عملية جرام - شميت لتحويل الأساس $\{ (1, 2) , (-3, 4) \}$ للفضاء $\mathbb{R}^2$ إلى

(أ) أساس متعامد .

(ب) أساس متعامد مُعيَّر .

٤٠ - استخدم عملية جرام - شميت لتحويل الأساس

$\{ (1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3) \}$ للفضاء $\mathbb{R}^3$ إلى أساس متعامد مُعيَّر

٤١ - بفرض الأساس المتعامد المُعيَّر

$$N = \{ (\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}) , (\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}) , (0, 1, 0) \}$$

للفضاء $\mathbb{R}^3$ اكتب المتجه $(1, 2, -1)$ كتركيب خطي مع متجهات المجموعة N .

٤٢ - بفرض W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$ أساسه المتعامد المُعيَّر $N = \{ N_1 , N_2 \}$

حيث $N_1 = (0, 1, 0) , \quad N_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}} , 0 , \frac{2}{\sqrt{5}})$

اكتب المتجه $X = (-1, 0, 1)$ على صورة $Z + Y$ حيث $Z = proj_W X$
ثم أوجد المسافة من X إلى W .

٤٣ - إذا كان $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مؤثراً خطياً حيث $L (x_1 , x_2) = (x_1 , 0)$

(أ) هل (0, 2) ينتمي إلى $ker\, L$

(ب) هل (2, 2) ينتمي إلى $ker\, L$

(جـ) هل (3, 0) ينتمي إلى $ran\, L$

(د) أوجد $ker\, L$

(هـ) أوجد $ran\, L$

٤٤ - إذا كان $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ مؤثراً خطياً حيث

$$L (x, y, z) = (x - y, x + 2y , z)$$

(أ) أوجد أساس $ker\, L$

(ب) أوجد أساس $ran\, L$

٤٥ - بفرض أن $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المؤثر الخطي المعرف بواسطة

$$L (x, y) = (x - 2y, x + 2y)$$

وبفرض الأساس $S = \{ (1, -1) , (0, 1) \}$ للفضاء $\mathbb{R}^2$ ، T هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^2$ أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

(أ) الأساس S

(ب) الأساسان S, T

(جـ) الأساسان T, S

(د) الأساس T

(هـ) احسب $L\,(3, 2)$ باستخدام المصفوفات التي حصلت عليها في (أ) ، (ب) ، (جـ) ، (د) .

٤٦ - بفرض أن $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المؤثر الخطي المعرف بواسطة

$$L\,(x, y, z) = (x + 2y + z\,, 2x - y\,, 2y + z)$$

وبفرض S هو الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$

وبفرض $T = \{\,(1, 0, 1)\,, (0, 1, 1)\,, (0, 0, 1)\,\}$ أساساً آخر للفضاء $\mathbb{R}^3$ أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

(أ) الأساس S

(ب) الأساسان S, T

(جـ) الأساسان T, S

(د) الأساس T

(هـ) احسب $L\,(2, 1, -1)$ باستخدام المصفوفات التي حصلت عليها في (أ) ، (ب) ، (جـ) ، (د) .

٤٧ - بفرض أن $L : M_{22} \to M_{22}$ المعرف بواسطة

$$L\,(A) = A^T$$

وبفرض

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

أساسان للفضاء M_{22} .

أوجد مصفوفة L بالنسبة إلى

(أ) الأساس S

(ب) الأساسان S, T

(جـ) الأساسان T, S

(د) الأساس T .

٤٨ - أوجد المصفوفة المميزة - كثيرة الحدود المميزة - القيم الذاتية - المتجهات الذاتية وإمكانية الحصول على المصفوفة القطرية $P^{-1} A P$ حيث P مصفوفة قابلة للانعكاس لكل من المصفوفات التالية

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

٤٩ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $(-2, 3, 4)$ وعمودي على المتجه $(0, 0, -4)$.

٥٠ - أوجد معادلة المستوى المار بالنقط الثلاث

$(2, 3, 4)\,,\ (-1, -2, 3)\,,\ (-5, -4, 2)$

٥١ - أوجد نقطة تقاطع المستقيمين

$x = 2 - 3t,\ y = 3 + 2t,\ z = 4 + 2t$

$x = 5 + 2s,\ y = 1 - 3s,\ z = 2 + s$

٥٢ - أوجد نقطة تقاطع المستقيم $x = 2 - 3t,\ y = 4 + 2t,\ z = 3 - 5t$

والمستوى $2x + 3y + 4z + 8 = 0$

٥٣ - هل النقط $(1-,8,0),(3-,2-,4),(2-,3,2)$ تقع على استقامة واحدة .

٥٤ - اكتب الصيغة التربيعية في الصورة $X^T A X$ لكل من :

(i) $2x_1^2 + 3x_1 x_2 - 5x_1 x_3 + 7x_2 x_3$

(ii) $4x^2 - 6xy - 2y^2$

٥٥ - أوجد صيغة تربيعية مكافئة لكل من :

(i) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2 x_3.$

(ii) $2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2 x_3.$

(iii) $6x_1 x_2 + 8x_2 x_3.$

٥٦ - اجري انتقال للمحاور للتعرف على منحنى المعادلة ثم اكتب المعادلة في الصورة القياسية لكل من المعادلات التالية :

(i) $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

(ii) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$

(iii) $y^2 - 4y = 0$

(iv) $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

٥٧ - اجري دوران للمحاور للتعرف على منحنى المعادلة ثم اكتب المعادلة في الصورة القياسية لكل من المعادلات التالية :

(i) $x^2 + xy + y^2 = 6$

(ii) $x^2 + y^2 + 4xy = 4$

(iii) $xy = 1$

٥٨ - تعرف على منحنى المعادلة

$$6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}\,x - 18\sqrt{5}\,y = 5$$

ثم اكتب المعادلة في الصورة القياسية

٥٩ - استخدم القصور الذاتي للمصفوفة A المصاحبة للصيغة التربيعية لتصنف سطوح الدرجة الثانية لكل من المعادلات التالية :

(i) $z = 4xy$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 4$

(iii) $5y^2 + 20y + z - 23 = 0$

(iv) $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 8x - 18y - 4z - 19 = 0$

٦٠ - اكتب معادلة سطوح الدرجة الثانية التالية في الصورة القياسية مع تحديد اسم السطح .

(i) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 8xz + 8yz + 3x + z = 0$

(ii) $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz - 8yz + 8x = 15$

(iii) $2y^2 + 2z^2 + 4yz + \frac{16}{\sqrt{2}}\,x + 4 = 0$

المصطلحات الرياضية

الباب الأول

Augmented Matrix	المصفوفة الموسعة
Coefficient Matrix	مصفوفة المعاملات
Column	عمـــود
Consistent	غير متناقضة
Elementary Row Operations	عمليات صفية بسيطة
Elimination	حذف
Entries	عناصر
Homogeneous	متجانس
Inconsistent	متناقضة
Linear Equations	معادلات خطية
Matrix	مصفوفة
Non-Trivial Solution	حل غير تافهة
Row	صف
Row Echolen Form	صورة صفية مميزة
Reduced Row Echolen Form	صورة صفية مميزة مختزلة

الباب الثاني

Column Matrix	مصفوفة العمود
Diagonal Matrix	مصفوفة قطرية
Elementary Matrix	مصفوفة بسيطة

Inverse of a Matrix	معكوس المصفوفة
Invertible	قابلة للانعكاس
Linear Systems	أنظمة خطية
Lower Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية سفلى
Main Diagonal	القطر الرئيسي
Matrix Addition	جمع مصفوفات
Matrix Multiplication	ضرب مصفوفات
Non - Invertible	غير قابلة للانعكاس
Order	نوع
Pivot	مختار
Rectangular Matrix	مصفوفة مستطيلة
Row Matrix	مصفوفة الصف
Row Equivalent	تكافؤ صفي
Scalar Matrix	مصفوفة قياسية
Singular	شاذة (منعزلة)
Skew Symmetric	شبه متماثلة
Squar Matrix	مصفوفة مربعة
Symmetric Matrix	مصفوفة متماثلة
Transpose Matrix	مدور المصفوفة
Unit Matrix	مصفوفة الوحدة
Upper Triangular Matrix	مصفوفة مثلثية عليا
Zero Matrix	مصفوفة صفرية

الباب الثالث

Cofactor	مرافق
Determinants	محددات
Even	زوجي
Factorial	مضروب
Inversions	انعكاسات
Odd	فردي
Permutation	تبديلة

الباب الرابع

Absolute Value	قيمة مطلقة
Additive Inverse	نظير جمعي
Complex Numbers	الأعداد المركبة
Complex Vector Space	فضاء خطي مركب
Coordinate Planes	مستويات الإحداثيات
Coordinate Axes	محاور الإحداثيات
Dot (inner) Product	الضرب الداخلي
Euclidean n-Space	فضاء إقليدي نوني
Inequality	متباينة
Length	طول
Norm	معيار
Orthogonal	متعامد

Parallel	متواز
Plane	مستوى
Projection	إسقاط
Real Numbers	الأعداد الحقيقية
Scalar Product	ضرب قياسي
Sum	مجموع
Unit Vector	متجه الوحدة
Vector	متجـــه
Vector Product	ضرب اتجاهي
Zero Vector	المتجه الصفري

الباب الخامس

Columns Space	فضاء الأعمدة
Columns Vectors	متجهات الأعمدة
Direct Sum	مجموع مباشر
Linear Combination	تركيب خطي
Rows Space	فضاء الصفوف
Rows Vectors	متجهات الصفوف
Spans	تــولــد
Vector Space	فضاء متجه
Vector Subspace	فضاء جزئي متجه

الباب السادس

Basis	أساس
Dimension	بعد
Finite Dimension	ذو بعد نهائي
Infinite Dimension	لا نهائي البعد
Linearly Dependent	مرتبطة خطياً
Linearly Independent	مستقلة خطياً
Natural Basis	الأساس المعتاد
Orthogonal Basis	الأساسات المتعامدة
Orthonormal Basis	الأساسات المتعامدة المُعَّايرة
Rank	رتبـــة
Solution Vector	متجه الحل
Solution Space	فضاء الحل

الباب السابع

Bijective Mapping	تطبيق تقابل (تناظر أحادي)
Co-domain	نطاق مصاحب
Domain	نطاق
Image	صورة
Injective Mapping	تطبيق متباين (أحادي)

Kernel	نـــواة
Map	يرســـم
Matrix Transformation	مصفوفة التحويلات
Linear Transformation	تحويل خطي
Range	مدى
Surjective Mapping	تطبيق شامل (فوقي)
Zero Transformation	تحويل صفري

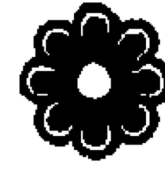
الباب الثامن

Characteristic	مميزة
Characteristic Equation	معادلة مميزة
Characteristic Matrix	مصفوفة مميزة
Characteristic Polynomial	كثيرة حدود مميزة
Characteristic Value	قيمة مميزة
Characteristic Vector	متجه مميز
Eigen	ذاتي
Eigenvalue	قيمة ذاتية
Eigenvector	متجه ذاتي
Eigenspace	فضاء ذاتي
Multiplicity	مضاعف
Similar Matrices	مصفوفات متشابهة
Diagonalization	تحويل للشكل القطري

الباب التاسع

Conic Section	قطع مخروطي
Cone	مخروط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	سطح ناقص
Elliptic Cylinder	سطح اسطوانة ناقصي
Elliptic Paraboloid	سطح مكافئ ناقصي
Quadratic Form	الصيغة التربيعية
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic Cylinder	سطح اسطوانة زائدي
Hyperbolic Paraboloid	سطح مكافئ زائدي
Hyperboloid of one Sheet	سطح زائد ذو طية واحدة
Hyperboloid of two Sheets	سطح زائد ذو طيتين
Inertia	القصور الذاتي
Normal to	عمودي على
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	متعامد مُعاير
Parameter	بارامتير
Parametric Equation	المعادلة البارامترية
Parabola	قطع مكافئ

Parabolic Cylinder	سطح اسطوانة مكافىء
Plane	المستوى
Principl Axis	المحاور الرئيسية
Quadratic Surface	سطح من الدرجة الثانية
Rotation of Axes	دوران المحاور
Straight Line	الخط المستقيم
Transformation of Coordinates	تحويل الإحداثيات
Translation of Axes	انتقال المحاور



المــراجــع

المـــراجـــع

[1] Anton, H., "Elementary Linear Algebra", 3rd ed., John Wiley and Sons, Inc., New York, (1981).

[2] Dixon, c., "Linear Algebra", V. Nostrand Reinhold Co., NewYork, (1971).

[3] Hadley, G., "Linear Aglebra", Addison - Wesley Publishing Company, Inc., London, (1973).

[4] Johnson, L.W. and Riess, R.D., "Introduction to Linear Algebra" Addison - Westey Publishing Company, Inc., London, (1981).

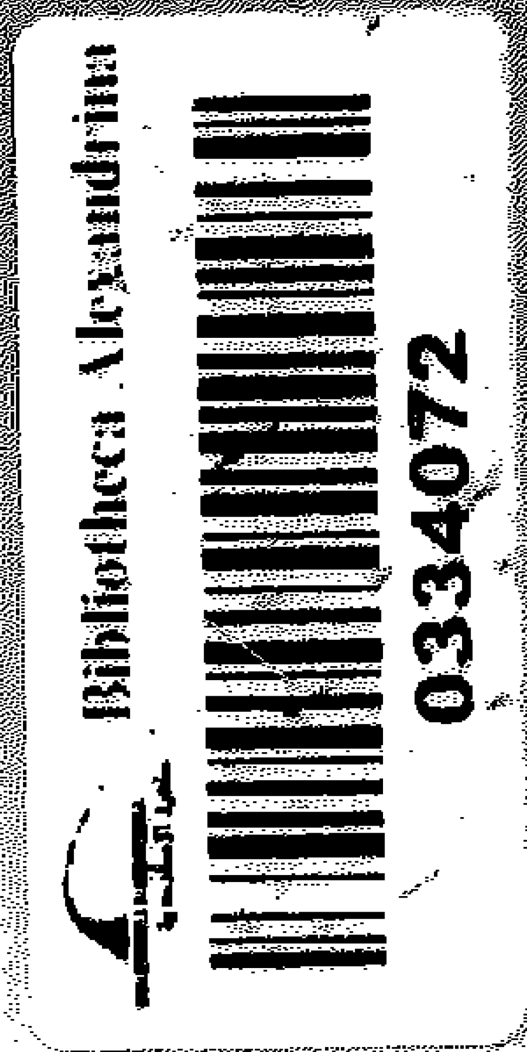
[5] Kolman, B., "Introductory Linear Algebra with Applications, 5th ed., Macmillan Publishing Company, NewYork, (1993).

[6] Morris, A.O., "Linear Algebra An Introduction", V. Nostrand Reinhold Co., NewYork, (1978).

[7] Nering, E. D., "Linear Algebra and Matrix Theory", 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc., NewYork, (1970).

[8] Stewart, F.m., "Introduction to Linear Algebra", V. Nostrand Company, Inc., London, (1963).

تم بحمده تعالى



دار الترجمة
الكويت

مطبعة الفيصل
ت: ٢٤٤٦٧٤٠-٢٤٤٦٨٣٨